



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles

Ingeniería Industrial

PFC

**Estudio de los esfuerzos internos provocados
por cargas sísmicas en cimentaciones con pilotes
inclinados**

Autor: Adrián Suárez Armas

**Tutores: Luis A. Padrón Hernández
Juan J. Aznárez González**

Estudio de los esfuerzos internos provocados por cargas sísmicas en cimentaciones con pilotes inclinados

Adrián Suárez Armas

Noviembre 2013

Agradecimientos

A mis tutores, los Drs. D. Luis A. Padrón Hernández y D. Juan J. Aznárez González mi más profundo agradecimiento por todo el trabajo y el esfuerzo demostrado desde el momento en que decidí realizar este proyecto. Para mí es motivo de admiración experimentar el empeño y la dedicación que ponen en cada aspecto de su ocupación, representan el ejemplo de que el trabajo bien realizado solo es posible si te apasiona lo que haces. A ambos les debo todo lo aprendido en este tiempo y el haberme descubierto el mundo de la dinámica de estructuras, gracias a todo esto hoy se abren más puertas en mi futuro laboral.

A mi familia, pilar fundamental en mi vida, con su ayuda constante este trabajo se ha hecho mucho más ligero de llevar. En especial a mi madre, primer apoyo en todo lo que desde pequeño he hecho, ella me ha inculcado la mayoría de los valores que me hacen ser la persona que soy y si he llegado hasta aquí es, en gran parte, gracias a su respaldo. En estas líneas incluyo, como no podía ser de otra manera, a mi pareja, quien todos estos años ha representado la más firme de las confianzas en mis posibilidades, le debo mucho en este trabajo. Además, no quiero dejar pasar la oportunidad de dedicar este logro a mis abuelos, sin duda, hoy estarían enormemente orgullosos de mí.

Por último, agradecer todo lo aportado por mis amigos y compañeros, con su compañía y ayuda durante estos meses han hecho menos individual este trabajo. A sabiendas o no, han sido un gran apoyo, descargando muchas veces sobre ellos las dudas y preocupaciones que esta tarea conlleva. Muchas gracias, mi gratitud a todos los que me han ayudado no queda sólo en esta líneas.

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación obtenida del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), la Agencia Canaria de Investigación, Innovación y Sociedad de la Información (ACIISI) del Gobierno de Canarias y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) a través de los Proyectos de Investigación BIA2010-21399-C02-01 y ProID20100224.

Índice de contenidos

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Estructura del documento	3
2. Metodología	5
2.1. Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas	5
2.1.1. Introducción	5
2.1.2. Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo	6
2.1.3. Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada	8
2.1.4. Acoplamiento BEM-FEM	13
2.1.5. Formulación del encepado rígido	14
2.1.6. Ensamblaje de la matriz global del sistema	17
2.1.7. Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga	17
2.1.8. Obtención de los esfuerzos internos del pilote	20
2.2. Modelo Winkler	21
2.2.1. Introducción	21
2.2.2. Solución de la ecuación analítica de una viga Euler-Bernoulli sometida a ondas SH de incidencia vertical y con un modelo Winkler para el suelo	21
2.2.3. Desarrollo de la rigidez compleja horizontal de Novak et al. [1] y de la función de impedancia de Verbic y Veletsos [2]	25
2.3. Obtención de los terremotos sintéticos	28
2.4. Tratamiento de los datos	29
3. Resultados	35
3.1. Introducción	35
3.2. Descripción del problema	35
3.2.1. Definición del problema	35
3.2.2. Parámetros del problema	36
3.3. Definición de los acelerogramas artificiales	37
3.3.1. Campo incidente	40
3.4. Validación del código	40
3.4.1. Modelo Winkler	41
3.4.2. Dezi et al. [3]	46
3.5. Envoltentes de esfuerzos	48
3.6. Factores de interacción cinemática	86
3.7. Funciones de respuesta en frecuencia	89
4. Conclusiones	91

ÍNDICE DE CONTENIDOS

4.1. Resumen y conclusiones	91
Referencias	94
I Apéndices	95
A. Funciones de Respuesta en Frecuencia	97
A.1. Funciones de Respuesta en Frecuencia de Momentos Flectores	97
A.2. Funciones de Respuesta en Frecuencia de Cortantes	104
A.3. Funciones de Respuesta en Frecuencia de Axiles	111

Índice de figuras

2.1.	Representación de las líneas de carga	7
2.2.	Definición del elementos finito	10
2.3.	Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico	12
2.4.	Pilote de referencia (r) y pilote periférico (p)	15
2.5.	Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote	18
2.6.	Estrategia de colocación no nodal	19
2.7.	Integración sobre la superficie de la punta del pilote	20
2.8.	Esquema de viga enterrada en un suelo con modelo Winkler	21
2.9.	Estructura esbelta embebida en un semiespacio	22
2.10.	Diagrama para la definición del problema	26
2.11.	Espectro de respuesta máxima	29
2.12.	Diagrama de Flujo	30
2.13.	Encepado 2×2	31
3.1.	Descripción geométrica del problema del pilote simple inclinado con giro impedido en la cabeza	36
3.2.	Descripción geométrica del problema del grupo de 2×2 pilotes inclinados unidos por un encepado rígido en su cabeza	36
3.3.	Acelerogramas artificiales para suelo Tipo A	38
3.4.	Acelerogramas artificiales para suelo Tipo C	39
3.5.	Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 1	42
3.6.	Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 2	43
3.7.	Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 3	44
3.8.	Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 4	45
3.9.	Casos 2 y 4. Validación BEM-FEM mediante resultados Dezi et al. [3]	47
3.10.	Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 0.6$ m y terremoto C1	50
3.11.	Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 0.6$ m y terremoto C2	51
3.12.	Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 0.6$ m y terremoto C3	52
3.13.	Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 1.2$ m y terremoto C1	53

ÍNDICE DE FIGURAS

3.14. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 1.2$ m y terremoto C2	54
3.15. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 1.2$ m y terremoto C3	55
3.16. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 0.6$ m y terremoto C1	56
3.17. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 0.6$ m y terremoto C2	57
3.18. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 0.6$ m y terremoto C3	58
3.19. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 1.2$ m y terremoto C1	59
3.20. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 1.2$ m y terremoto C2	60
3.21. Envolturas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 1.2$ m y terremoto C3	61
3.22. Comparación de momentos, $d = 0.6$ m y terremoto C1	62
3.23. Comparación de momentos, $d = 0.6$ m y terremoto C2	63
3.24. Comparación de momentos, $d = 0.6$ m y terremoto C3	64
3.25. Comparación de momentos, $d = 1.2$ m y terremoto C1	65
3.26. Comparación de momentos, $d = 1.2$ m y terremoto C2	66
3.27. Comparación de momentos, $d = 1.2$ m y terremoto C3	67
3.28. Comparación de cortantes, $d = 0.6$ m y terremoto C1	68
3.29. Comparación de cortantes, $d = 0.6$ m y terremoto C2	69
3.30. Comparación de cortantes, $d = 0.6$ m y terremoto C3	70
3.31. Comparación de cortantes, $d = 1.2$ m y terremoto C1	71
3.32. Comparación de cortantes, $d = 1.2$ m y terremoto C2	72
3.33. Comparación de cortantes, $d = 1.2$ m y terremoto C3	73
3.34. Comparación de axiles de tracción, $d = 0.6$ m y terremoto C1	74
3.35. Comparación de axiles de tracción, $d = 0.6$ m y terremoto C2	75
3.36. Comparación de axiles de tracción, $d = 0.6$ m y terremoto C3	76
3.37. Comparación de axiles de tracción, $d = 1.2$ m y terremoto C1	77
3.38. Comparación de axiles de tracción, $d = 1.2$ m y terremoto C2	78
3.39. Comparación de axiles de tracción, $d = 1.2$ m y terremoto C3	79
3.40. Comparación de axiles de compresión, $d = 0.6$ m y terremoto C1	80
3.41. Comparación de axiles de compresión, $d = 0.6$ m y terremoto C2	81
3.42. Comparación de axiles de compresión, $d = 0.6$ m y terremoto C3	82
3.43. Comparación de axiles de compresión, $d = 1.2$ m y terremoto C1	83
3.44. Comparación de axiles de compresión, $d = 1.2$ m y terremoto C2	84
3.45. Comparación de axiles de compresión, $d = 1.2$ m y terremoto C3	85
3.46. Factores de interacción cinemática para el pilote simple	87
3.47. Factores de interacción cinemática para el encepado 2×2	88
A.1. Función de respuesta en frecuencia de momentos para pilote simple y $E_p/E_s = 50$	98
A.2. Función de respuesta en frecuencia de momentos para pilote simple y $E_p/E_s = 100$	99
A.3. Función de respuesta en frecuencia de momentos para pilote simple y $E_p/E_s = 500$	100
A.4. Función de respuesta en frecuencia de momentos para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 50$	101

A.5. Función de respuesta en frecuencia de momentos para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 100$	102
A.6. Función de respuesta en frecuencia de momentos para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 500$	103
A.7. Función de respuesta en frecuencia de cortantes para pilote simple y $E_p/E_s = 50$	105
A.8. Función de respuesta en frecuencia de cortantes para pilote simple y $E_p/E_s = 100$	106
A.9. Función de respuesta en frecuencia de cortantes para pilote simple y $E_p/E_s = 500$	107
A.10. Función de respuesta en frecuencia de cortantes para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 50$	108
A.11. Función de respuesta en frecuencia de cortantes para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 100$	109
A.12. Función de respuesta en frecuencia de cortantes para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 500$	110
A.13. Función de respuesta en frecuencia de axiles para pilote simple y $E_p/E_s = 50$	112
A.14. Función de respuesta en frecuencia de axiles para pilote simple y $E_p/E_s = 100$	113
A.15. Función de respuesta en frecuencia de axiles para pilote simple y $E_p/E_s = 500$	114
A.16. Función de respuesta en frecuencia de axiles para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 50$	115
A.17. Función de respuesta en frecuencia de axiles para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 100$	116
A.18. Función de respuesta en frecuencia de axiles para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 500$	117

Índice de tablas

3.1. Resumen de parámetros del problema	37
3.2. Variación de parámetros en los casos	40
3.3. Parámetros comunes a todos los casos	41

Introducción

1.1 Antecedentes

En el caso de estructuras sometidas a grandes cargas horizontales y cimentadas sobre suelos no rocosos, los pilotes inclinados son una solución natural, comúnmente utilizadas en estructuras offshore y en puentes, para aumentar la rigidez horizontal de la cimentación. Aún así, su uso en zonas con riesgo sísmico está desaconsejada (ver, por ejemplo, Eurocódigo 8 - Parte 5 [4]) desde hace cierto tiempo, debido principalmente a diversos fallos estructurales en pilotes inclinados observados en diferentes terremotos de finales de los 80 y principio de los 90 (ver, por ejemplo, los terremotos de Loma Prieta en 1989 o Northridge en 1994). Sin embargo, diversos indicios indican que estos fallos pudieron estar, muy probablemente, vinculados a fallos de diseño por falta de información respecto a la respuesta de estos sistemas estructurales. Por otro lado, además, diversas investigaciones apuntan a posibles beneficios del uso de este tipo de cimentaciones ante fuertes terremotos.

Deng et al. [5], estudiando una configuración compleja de pilotes donde los pilotes externos se inclinaban alrededor de los 9.5° , vieron que en su caso los axiles en la cabeza crecían con factores de entre 5 y 8. Por otro lado, Isam et al. [6] estudiaron la respuesta cinemática de un grupo de 2x2 micropilotes inclinados con un ángulo de 20° , concluyendo que, para el caso concreto en estudio, los esfuerzos axiles y cortantes en la cabeza se multiplicaban por 3 y por 0.55 respectivamente al inclinar los pilotes, mientras el momento flector se multiplicaba por 0.67, siendo todos estos factores más cercanos a la unidad para inclinaciones de 30° . Sin embargo, el resto de los autores parecen coincidir en que la inclinación de los pilotes suele llevar asociada un aumento de todos los esfuerzos en la unión rígida pilote-encepado. Gerolymos et al. [7] estudiaron grupos de 2x1 pilotes y encontraron que los momentos flectores y los esfuerzos axiles en la cabeza de los pilotes inclinados eran del orden de 3-4 veces superiores a los obtenidos para pilotes verticales. El trabajo de Giannakou et al. [8], del mismo grupo de investigación, concluye igualmente que en el problema cinemático, momentos y axiles crecen al inclinar los pilotes. Por otro lado, Tazoh et al. [9] presentaron resultados experimentales centrífugos a escala de dos grupos de 2x2, uno de pilotes verticales y otro con pilotes inclinados 10° , encontrando que las deformaciones en los pilotes son sistemáticamente mayores en el caso de los pilotes inclinados. Escoffier [10], también con experimentos en centrífugos, encontró que los esfuerzos residuales (remanentes de eventos anteriores) tienen un peso muy importante en el caso de los pilotes inclinados. En general, encuentra también que los esfuerzos aumentan al inclinar los pilotes.

Por todo esto, es de interés estudiar, de manera más sistemática, cómo afecta la inclinación de los pilotes a la distribución de esfuerzos a lo largo de los mismos, de cara a comprender su funcionamiento y a facilitar el dimensionamiento de las secciones. Este Trabajo Fin de Carrera persigue, precisamente, analizar la influencia del ángulo de inclinación de los pilotes sobre los

esfuerzos internos desarrollados en ellos.

El Proyecto Fin de Carrera que se propone se integra en la línea de trabajo que llevan a cabo los miembros de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario SIANI en el campo de la Dinámica de Estructuras y, en particular, en el estudio de la influencia de los fenómenos de interacción suelo-estructura en la respuesta de cimentaciones. En concreto, ha sido de interés en los últimos años el análisis de la respuesta dinámica de cimentaciones pilotadas. Así, se ha desarrollado e implementado un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico, que aprovecha las ventajas de cada metodología, para el análisis dinámico directo de este tipo de estructuras. Este modelo cuenta con las ventajas del MEC para representar el terreno donde se cimenta la edificación (su carácter de medio semi-infinito así como la presencia de ondas sísmicas excitadoras) y la simplificación que supone modelar los pilotes con el MEF. Este programa, ya muy desarrollado en la actualidad, ha permitido realizar hasta el momento:

1. Para cimentaciones constituidas por pilotes hincados verticalmente en el terreno:
 - a) El análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas individuales (impedancias e interacción cinemática)
 - b) El estudio de la respuesta de la superestructura y de otras estructuras cercanas, sometido el conjunto a trenes de ondas sísmicas con incidencia vertical
 - c) El análisis de los esfuerzos inducidos por sismos constituidos por trenes de ondas P, SV, SH y Rayleigh con ángulo de incidencia variable (no vertical)
2. Para cimentaciones constituidas por pilotes inclinados, se han obtenido y publicado resultados correspondientes a impedancias para cimentaciones pilotadas individuales.

1.2 Objetivos

Este Trabajo Fin de Carrera persigue analizar la influencia del ángulo de inclinación de los pilotes sobre los esfuerzos internos desarrollados en ellos.

Además, haciendo referencia al carácter académico de esta tarea, en este Trabajo Fin de Carrera se proponen una serie de objetivos en una secuencia que permita al autor, en primer lugar, ampliar su formación en el campo de la dinámica de estructuras y los métodos numéricos, y en segundo lugar, estar en disposición de utilizar y modificar adecuadamente el software ya disponible para la obtención de resultados. Más detalladamente los objetivos a cumplir son:

- Repasar y ampliar los conocimientos teóricos relacionados con la dinámica de estructuras.
- Estudiar las bases de la Elastodinámica Lineal, del Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos, que han servido para el desarrollo del software aplicable al análisis dinámico de estructuras pilotadas.
- Tomar contacto y familiarizarse con el lenguaje de programación FORTRAN90, que es el utilizado en la implementación de los modelos matemáticos que el autor utilizará y modificará.
- Familiarizarse con el programa informático vinculado al modelo acoplado MEC-MEF. Como se ha comentado previamente, en el momento actual este código permite el estudio dinámico de cimentaciones pilotadas.

- Formular e implementar los códigos necesarios para la gestión y tratamiento de los resultados que pretenden obtenerse. Tareas que adquieren un carácter complejo debido al volumen de casos posibles y a las características del análisis paramétrico que desea realizarse.

1.3 Estructura del documento

En esta sección se lleva a cabo un pequeño resumen de los capítulos que componen este trabajo, dejando así constancia de la estructura y contenido del mismo. En el capítulo 2 se especifica toda la metodología necesaria para la obtención y el tratamiento de los resultados expuestos a lo largo de este documento. Este capítulo se divide en cuatro grandes partes.

En la primera sección del capítulo 2 se desarrolla el modelo acoplado de Elementos de Contorno-Elementos Finitos, el cual se utiliza para modelar las cimentaciones a estudiar y obtener los resultados que se persiguen. Para empezar se definen las ecuaciones de elementos de contorno para el semiespacio que es el suelo, seguido por el desarrollo de las ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada. Una vez definidos ambos métodos, se realiza el acoplamiento de los mismos. Obtenido el modelo de ecuaciones global se especifica la formulación necesaria para incluir el encepado rígido en el modelo. En la segunda sección del segundo capítulo, se lleva a cabo el desarrollo del modelo Winkler, que utilizaremos para validar los resultados procedentes del MEC-MEF y así dar solidez a los resultados que se presentan. La tercera parte tiene como objetivo definir el proceso seguido para la generación de los terremotos sintéticos, tomando como referencia el Eurocódigo-8 [11]. Por último, en la sección 2.4 se desglosa el procedimiento de tratamiento de los datos, los procedentes del modelo BEM-FEM y los correspondientes a las excitaciones, para finalmente obtener las envolventes de los esfuerzos a lo largo de los pilotes.

El capítulo 3 comienza con la descripción del problema que es objeto de estudio en este trabajo, estableciendo todos los parámetros necesarios para poder definir las configuraciones de la cimentación enterrada. Estas configuraciones se corresponden a una cimentación compuesta por un pilote simple con el giro restringido en su cabeza y a otra compuesta por un grupo de 2×2 pilotes unidos por un encepado rígido. A continuación, se definen los acelerogramas artificiales que se utilizarán como excitación tanto de los ejemplos de validación del código como del problema estudiado. Seguidamente, se continúa con la validación del código utilizado, tomando como referencia los resultados procedentes del modelo Winkler y los presentados por Dezi et al. [3], y comparando estos con los resultados obtenidos del BEM-FEM, para un mismo ejemplo. Por último se presentan y analizan sistemáticamente los resultados obtenidos. Esta última parte se divide en tres secciones, una por cada tipología de resultado. La primera corresponde a las envolventes de los diferentes esfuerzos internos de los pilotes (momento flector y esfuerzos cortante y axial), la segunda a los valores de los factores de interacción cinemática y en la tercera se presentan las funciones de respuesta en frecuencia de los mismos esfuerzos. Estas funciones de respuesta en frecuencia se recogen gráficamente en el apéndice A.

Por último, el capítulo 4 recoge un resumen del estudio seguido de las principales conclusiones extraídas del mismo. En esta parte del documento se expone cómo, tanto para el pilote simple como para el grupo de pilotes, a medida que aumenta la inclinación de los pilotes, en la mayor parte de los mismos disminuyen los momentos flectores y los esfuerzos cortantes, mientras que los esfuerzos axiales aumentan. Además, se analiza cómo la evolución de estos esfuerzos en la cabeza de la cimentación es diferente al tratarse de la configuración de pilote simple o de grupo de 2×2 pilotes. Así mismo, se desarrolla cómo la inclinación de los pilotes aumenta el

1 Introducción

filtrado de la energía procedente del terremoto pero también aumenta el giro transmitido por el encepado del grupo de pilotes, efectos que se deberán considerar según las características de la superestructura que sobre estos se cimiente.

En el presente capítulo se describe y desarrolla toda la metodología necesaria para obtener y analizar las envolventes de esfuerzos internos objeto de este proyecto..

Por una parte, se exponen las dos metodologías necesarias para generar las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF) de cimentaciones sometidas a un campo de ondas incidente. La primera de ellas es el modelo de elementos de contorno-elementos finitos (BEM-FEM), definido en la sección 2.1 y la segunda es el modelo dinámico de vigas en suelo Winkler (BDWF), el cual se trata en la sección 2.2. Las principales diferencias entre ambos modelos residen en que el BEM-FEM es un modelo más versátil y, en principio, más riguroso, sobre todo con la modelización del comportamiento del suelo, mientras que el BDWF se caracteriza por ser un modelo de formulación analítica específica, si bien menos riguroso en principio, pero mucho más económico en términos de coste computacional.

Por otra parte, en la sección 2.3 se define el procedimiento utilizado para generar los acelerogramas sintéticos que se utilizan como excitación de las cimentaciones que se estudian. Cabe comentar, que estos acelerogramas deben ser generados artificialmente debido a que no se dispone de terremotos reales grabados en la zona.

Por último, la sección 2.4 contiene la exposición de la metodología implementada para derivar las respuestas temporales y las envolventes de esfuerzos a partir de los datos resultantes del BEM-FEM. El software necesario para el tratamiento de todas las excitaciones y FRFs, y la obtención y representación de las envolventes de esfuerzos ha sido íntegramente desarrollado por el autor del proyecto, haciendo así posible abarcar el volumen de casos estudiados y llevar a cabo el análisis paramétrico deseado.

2.1 Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas

2.1.1 Introducción

A lo largo de este capítulo, se presentará el modelo empleado para el cálculo del comportamiento dinámico de las distintas cimentaciones de pilotes empleados en este trabajo. Dicho modelo consiste en un acoplamiento entre los métodos de elementos de contorno y elementos finitos, siendo el primero el empleado para modelar el terreno y el segundo para los pilotes.

A la hora de plantear el método directo de los elementos de contorno aplicado al problema elastodinámico en el dominio de la frecuencia, la ecuación integral en el contorno es generalmente obtenida a partir del teorema de reciprocidad de la elastodinámica, teniendo en cuenta

la fuerzas por unidad de volumen. Sin embargo, antes del proceso de discretización que permite plantear el sistema lineal de ecuaciones del método de los elementos de contorno, se asume, en la mayor parte de las aplicaciones, que dichas fuerzas por unidad de volumen son nulas en todo el dominio, lo que permite cancelar el último término de la ecuación integral.

Por contra, el enfoque utilizado en este trabajo, similar al presentado por Matos Filho et al [12] en un modelo estático previo, incluye este término al considerar que las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo pueden entenderse como fuerzas de volumen que actúan en el interior del dominio. Por otro lado, la rigidez aportada por los pilotes es tenida en cuenta a través de elementos finitos longitudinales que relacionan los desplazamientos de distintos puntos internos del suelo alineados a lo largo del eje del pilote. De este modo, no hay necesidad de discretizar la interfase pilote-suelo utilizando elementos de contorno, con el consiguiente ahorro en grados de libertad. Así, no se considera un vaciado en el suelo, que se modela como un medio continuo.

La sección 2.1.2 presenta la ecuación integral de contorno para el suelo, donde las fuerzas y las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo son consideradas como líneas de carga y fuerzas internas que aparecen en el interior del dominio. A continuación, la sección 2.1.3 expone la formulación de elementos finitos utilizada para modelar los pilotes, con lo que ya es posible realizar el acoplamiento entre los elementos finitos y los elementos de contorno, tal y como se hace en la sección 2.1.4. Posteriormente, la agrupación de pilotes por medio de encajados rígidos es presentada la sección 2.1.5. La exposición del modelo numérico de elementos de contorno y elementos finitos termina en la sección 2.1.6, donde se aborda el proceso de ensamblaje del sistema de ecuaciones final. Algunos aspectos numéricos sobre la evaluación de las integrales relacionadas con las líneas de carga son explicados en la sección 2.1.7. Parte del material presentado en este capítulo ha sido previamente publicado en algunos trabajos elaborados por los tutores del proyecto [13,14].

2.1.2 Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo

El terreno es modelado a través del método de los elementos de contorno como una región lineal, homogénea, isótropa, viscoelástica y no acotada, con un módulo de elasticidad transversal complejo μ del tipo $\mu = Re[\mu](1 + 2i\beta)$, donde β es el coeficiente de amortiguamiento. La ecuación integral en el contorno para un estado elastodinámico definido en un dominio Ω con un contorno Γ puede ser escrito de forma general y condensada como

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{X} d\Omega \quad (2.1)$$

donde \mathbf{c}^l es el tensor del término libre en el punto de colocación \mathbf{x}^l , \mathbf{X} son las fuerzas de volumen en el dominio Ω , \mathbf{u} y \mathbf{p} son los vectores de desplazamientos y tensiones, y \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* son los tensores de la solución fundamental elastodinámica, que representan la respuesta de una región no acotada a una carga armónica unitaria concentrada en un punto \mathbf{x}^l y con una variación temporal del tipo $e^{i\omega t}$.

En gran número de aplicaciones se considera que la fuerzas de volumen \mathbf{X} son nulas. De aquí en adelante, por contra, se considerará que la interacción pilote-suelo se produce, desde el punto de vista de la ecuación integral, a través de fuerzas internas puntuales situadas en la punta de los pilotes y de líneas de carga repartidas a lo largo del eje de los pilotes. Se considera, por tanto, que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes. Las líneas de carga dentro del suelo, las tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, actuando sobre el pilote y en el interior del suelo ($\mathbf{q}^{p_j} = -\mathbf{q}^{s_j}$), y las fuerzas internas puntuales F_{p_j} en la punta de los pilotes, están representadas en la fig. 2.1, donde se muestra un esquema del modelo.

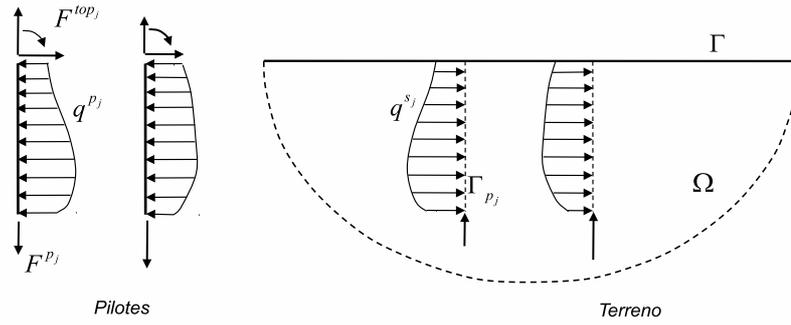


Figura 2.1: Representación de las líneas de carga

De acuerdo a las hipótesis enumeradas anteriormente, la ec. (2.1) puede ser escrita como:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[\int_{\Gamma_{p_j}} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^{s_j} d\Gamma_{p_j} - \delta_j \Upsilon_k^j F_{p_j} \right] \quad (2.2)$$

donde Γ_{p_j} es la interfase pilote-suelo a lo largo de la línea de carga j en el interior del dominio Ω ; n_p es el número total de líneas de carga en el dominio Ω ; δ_j toma valor unitario si la línea de carga j contiene a la punta de un pilote flotante, o toma el valor cero en caso contrario; y Υ_k^j es un vector de tres componentes que representa la contribución de la fuerza axial F_{p_j} en la punta de la línea de carga j -ésima.

Los contornos Γ son discretizados por medio de elementos cuadráticos triangulares o cuadriláteros con seis o nueve nodos, respectivamente. Cuando los contorno han sido discretizados, la ec. (2.2) puede ser escrita para la región Ω , en todos los nodos sobre Γ con el fin de obtener una ecuación matricial del tipo:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{sj} F_{p_j} = 0 \quad (2.3)$$

donde \mathbf{u}^s y \mathbf{p}^s son los vectores de desplazamientos y tensiones nodales de los elementos de contorno; \mathbf{H}^{ss} y \mathbf{G}^{ss} son las matrices de coeficientes obtenidas de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes; y \mathbf{G}^{sp_j} es la matriz de coeficientes obtenida de la integración numérica sobre la línea de carga j del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación (2.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre Γ .

Por otro lado, la ec. (2.2) será también aplicada sobre los puntos internos que pertenecen a la línea de carga Γ_{p_i} , lo que lleva a la siguiente expresión:

$$\mathbf{c} \mathbf{u}^{p_i} + \mathbf{H}^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{H}^{p_i s}$ y $\mathbf{G}^{p_i s}$ son matrices de coeficientes obtenidas a través de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes; y $\mathbf{G}^{p_i p_j}$ es la matriz de coeficientes obtenida a través de la integración numérica sobre la línea de carga j del producto de la solución fundamental por las funciones de

interpolación (2.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre la línea de carga Γ_{p_i} . Aquí, \mathbf{u}^{p_i} es el vector de desplazamientos nodales de la línea de carga i , el cual es multiplicado por el vector \mathbf{c} , que toma el valor $1/2$ en posiciones correspondientes a nodos del pilote localizados sobre un contorno suave (como en el caso de las cabezas de los pilotes) o toma un valor unitario en los puntos internos. Hay que tener en cuenta que la posición del nodo que define la cabeza del pilote puede coincidir con la posición de algún nodo de la superficie. En este caso existirán dos nodos con idénticas coordenadas espaciales. Entonces, dos de las ecuaciones del sistema, la escrita para el nodo de la superficie y la escrita para el nodo de la línea de carga, serán equivalentes, pero el término libre ocupará diferentes posiciones en la matriz de coeficientes, lo que evitará que se tenga un sistema de ecuaciones singular.

Por otro lado, dado que para pilotes flotantes se considera la existencia de una fuerza axial actuando en la punta, es necesario escribir una ecuación extra. Para ello, la carga puntual debe ser aplicada en la dirección x_3 en algún punto no nodal. Dado su cercanía a la punta del pilote, el punto más idóneo es el de coordenada elemental adimensional $\xi = -1/2$ del elemento inferior (véase la sección 2.1.3.2). De este modo, la ecuación extra es

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left(3u_3^{b_k} + 6u_3^{b_l} - u_3^{b_m} \right) + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{p}}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[\int_{\Gamma_{p_j}} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{s_j} \, d\Gamma_{p_j} - \delta_j \left(\Upsilon_b^j \right)_3 F_{p_j} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $u_3^{b_k}, u_3^{b_l}$ y $u_3^{b_m}$ son los desplazamientos verticales de los nodos k, l y m del elemento inferior, $\hat{\mathbf{p}}^* = \{p_{31}^*, p_{32}^*, p_{33}^*\}$ y $\hat{\mathbf{u}}^* = \{u_{31}^*, u_{32}^*, u_{33}^*\}$. De forma matricial, la ec. (2.5) puede ser escrita como

$$\mathbf{D}^T \mathbf{u}_b^{p_i} + \mathbf{H}_e^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}_e^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}_e^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon_{b_3}^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{u}_b^{p_i}$ es el vector de desplazamientos nodales en los nodos del elemento inferior de la línea de carga i (que corresponde al extremo inferior de un pilote flotante) donde la carga unitaria está aplicada; $\mathbf{H}_e^{p_i s}$ y $\mathbf{G}_e^{p_i s}$ son vectores obtenidos por integración numérica sobre Γ del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma de los elementos de contorno; y $\mathbf{G}_e^{p_i p_j}$ es el vector obtenido de la integración sobre Γ_{p_j} del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma definidas en (2.12), cuando la carga unitaria está aplicada en el punto extra de la línea de carga i . Finalmente, $\mathbf{D}^T = 1/8\{0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, -1\}$.

2.1.3 Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada

2.1.3.1 Ecuación de movimiento

El comportamiento de un pilote sometido a cargas dinámicas puede ser descrito a través de la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.7)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del pilote, $\mathbf{u}(t)$ es el vector de desplazamientos nodales y $\mathbf{f}(t)$ es el vector de fuerzas nodales sobre el pilote.

2.1 Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas

Considerando ahora que el pilote está sujeto a cargas armónicas, los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales pueden ser expresados como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^p e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

donde \mathbf{u}^p es el vector que contiene las amplitudes de las traslaciones y rotaciones nodales, \mathbf{F} es el vector que contiene las amplitudes de las fuerzas y momentos nodales, ω es la frecuencia angular de la excitación, e $i = \sqrt{-1}$. De este modo, y considerando un pilote con amortiguamiento interno nulo, la ec. (2.7) puede expresarse ahora como

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}^p = \mathbf{F} \quad (2.9)$$

2.1.3.2 Definición del elemento viga

Los pilotes son modelados, haciendo uso del método de los elementos finitos, como elementos verticales de acuerdo a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, y son discretizados utilizando elementos de tres nodos (como se muestra en la fig. 2.2) que han sido definidos de manera que sea posible aproximar la deformada del pilote con un número bajo de elementos. Se definen 13 grados de libertad sobre dicho elemento: un desplazamiento vertical y dos desplazamientos horizontales en cada nodo, y además, dos rotaciones θ en cada uno de los nodos extremos, uno alrededor del eje x_1 y otro alrededor del eje x_2 .

Los desplazamientos laterales u_1 y u_2 a lo largo del elemento son aproximados a través de un conjunto de funciones de forma de cuarto grado, mientras que los desplazamientos verticales u_3 son aproximados por funciones de segundo grado. De este modo, sus expresiones quedan:

$$u_i = \varphi_1 u_{k_i} + \varphi_2 \theta_{k_i} + \varphi_3 u_{l_i} + \varphi_4 u_{m_i} + \varphi_5 \theta_{m_i} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.10a)$$

$$u_3 = \phi_1 u_{k_3} + \phi_2 u_{l_3} + \phi_3 u_{m_3} \quad (2.10b)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \xi \left(-\frac{3}{4} + \xi + \frac{1}{4} \xi^2 - \frac{1}{2} \xi^3 \right) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4} \xi (-1 + \xi + \xi^2 - \xi^3) \\ \varphi_3 &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\ \varphi_4 &= \xi \left(\frac{3}{4} + \xi - \frac{1}{4} \xi^2 - \frac{1}{2} \xi^3 \right) \\ \varphi_5 &= \frac{1}{4} \xi (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (2.11)$$

y

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ \phi_2 &= 1 - \xi^2 \\ \phi_3 &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

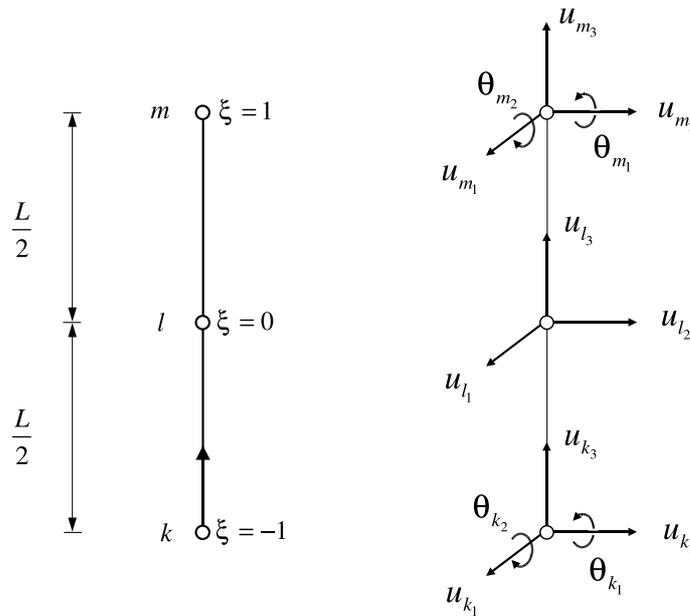


Figura 2.2: Definición del elemento finito

siendo ξ la coordenada adimensional elemental que varía desde $\xi = -1$ hasta $\xi = +1$.

Las submatrices de rigidez que definen el comportamiento lateral y axial del elemento (indicadas por los superíndices l y a respectivamente), pueden ser obtenidas haciendo uso de las funciones de forma arriba indicadas y del principio de los desplazamientos virtuales como:

$$k_{ij}^l = \int_L \varphi_i'' EI \varphi_j'' dx_3 \quad ; \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (2.13)$$

y

$$k_{ij}^a = \int_L \phi_i' EA \phi_j' dx_3 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

donde las primas indican derivada respecto de la coordenada x_3 . De este modo, las submatrices de rigidez son:

$$\mathbf{K}^l = \frac{EI}{5L} \begin{bmatrix} \frac{316}{L^2} & \frac{94}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{196}{L^2} & \frac{-34}{L} \\ \frac{94}{L} & 36 & \frac{-128}{L} & \frac{34}{L} & -6 \\ \frac{-512}{L^2} & \frac{-128}{L} & \frac{1024}{L^2} & \frac{-512}{L^2} & \frac{128}{L} \\ \frac{196}{L^2} & \frac{34}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{316}{L^2} & \frac{-94}{L} \\ \frac{-34}{L} & -6 & \frac{128}{L} & \frac{-94}{L} & 36 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^a = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde E es el módulo de Young del pilote, A e I son el área y el momento de inercia de la sección del pilote, y L es la longitud del elemento. Se considera que los momentos de inercial respecto a ambos ejes principales de inercia son iguales.

De manera similar, los coeficientes de influencia que constituyen la matriz de masa de un elemento, y que representan las fuerzas de inercia que se oponen a la aceleración experimentada

2.1 Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas

por un cierto grado de libertad, pueden ser evaluadas de manera similar como:

$$m_{ij}^l = \int_L \varphi_i \bar{m} \varphi_j dx_3 \quad ; \quad m_{ij}^a = \int_L \phi_i \bar{m} \phi_j dx_3 \quad (2.16)$$

De este modo, y considerando un viga con una masa \bar{m} uniformemente distribuida, las matrices de masa consistente que rigen los comportamientos lateral y axial son, respectivamente:

$$\mathbf{M}^l = L \bar{m} \begin{bmatrix} \frac{13}{63} & \frac{L}{63} & \frac{4}{63} & \frac{-23}{630} & \frac{L}{180} \\ \frac{L}{63} & \frac{L^2}{630} & \frac{2L}{315} & \frac{-L}{180} & \frac{L^2}{1260} \\ \frac{4}{63} & \frac{2L}{315} & \frac{128}{315} & \frac{4}{63} & \frac{-2L}{315} \\ \frac{-23}{630} & \frac{-L}{180} & \frac{4}{63} & \frac{13}{63} & \frac{-L}{63} \\ \frac{L}{180} & \frac{L^2}{1260} & \frac{-2L}{315} & \frac{-L}{63} & \frac{L^2}{630} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{M}^a = \frac{L \bar{m}}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.1.3.3 Fuerzas sobre el pilote

Dentro de las fuerzas externas actuando sobre el pilote, se considera la existencia de fuerzas y momentos puntuales en la cabeza del pilote, fuerzas distribuidas a lo largo del fuste debidas a la interacción pilote-suelo, y una fuerza axial sobre la punta del pilote. De este modo, el vector de fuerzas nodales \mathbf{F} puede ser descompuesto como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{eq} = \mathbf{F}_{top} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}^{eq} \quad (2.18)$$

donde \mathbf{F}^{ext} incluye las fuerzas en la cabeza \mathbf{F}_{top} y la fuerza axial en la punta del pilote \mathbf{F}_p ; y \mathbf{F}^{eq} es el vector de fuerzas nodales equivalente debido a la interacción pilote-suelo, que puede ser calculado como $\mathbf{F}^{eq} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^p$, donde \mathbf{Q} es la matriz que transforma las tensiones en fuerzas nodales equivalentes.

Las fuerzas externas que se definen sobre un elementos genérico están esquematizadas en la fig. 2.3. Las tensiones \mathbf{q}^p a lo largo de la interfase pilote-suelo son aproximadas como:

$$q_i = \phi_1 q_{k_i} + \phi_2 q_{l_i} + \phi_3 q_{m_i} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

utilizando el conjunto de funciones de forma definidos por la ec. (2.12). La distribución de tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo es continua entre elementos.

De nuevo, los coeficientes de la matriz \mathbf{Q} para la computación de las fuerzas laterales pueden ser obtenidos utilizando el principio de los desplazamiento virtuales:

$$q_{ij}^l = \int_L \varphi_i \phi_j dx \quad ; \quad i = 1, \dots, 5 \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

mientras que los coeficientes de la matriz correspondiente a las fuerzas axiales se obtienen haciendo:

$$q_{ij}^a = \int_L \phi_i \phi_j dx \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

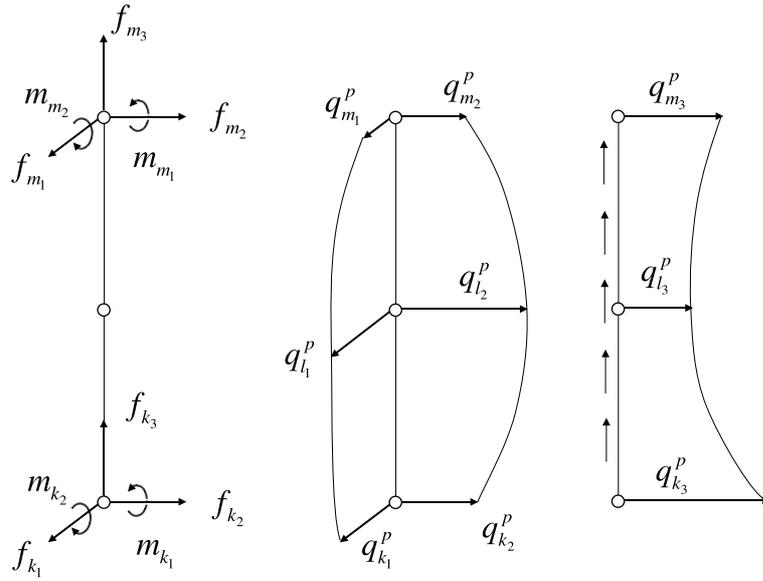


Figura 2.3: Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico

resultando en las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}^l = \begin{bmatrix} \frac{23L}{140} & \frac{11L}{105} & \frac{-L}{28} \\ \frac{L^2}{84} & \frac{L^2}{105} & \frac{-L^2}{210} \\ \frac{4L}{105} & \frac{16L}{35} & \frac{4L}{105} \\ \frac{-L}{28} & \frac{11L}{105} & \frac{23L}{140} \\ \frac{L^2}{210} & \frac{-L^2}{105} & \frac{-L^2}{84} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^a = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.1.3.4 Sistema de ecuaciones para el pilote simple

Una vez que todas las matrices elementales han sido obtenidas para el pilote completo, es posible escribir, para cada pilote, la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}^p = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^p \quad (2.23)$$

donde $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$. Dado que cada pilote es discretizado utilizando tantos elementos como sea necesario para poder seguir de forma precisa su deformada, las matrices $\bar{\mathbf{K}}$ y \mathbf{Q} deben ser entendidas como matrices globales, obtenidas a partir de las matrices elementales siguiendo los procedimientos usuales del método de los elementos finitos.

Nótese que, dado que se asume que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes, el valor de la masa distribuida asignado a cada pilote debe ser modificado según la expresión $\bar{m} = A(\rho_p - \rho_s)$, con el objetivo de no sobrestimar la masa total del sistema, siendo ρ_p y ρ_s las densidades del pilote y del suelo. Consideraciones de similar naturaleza fueron adoptadas en [15–17].

2.1.4 Acoplamiento BEM-FEM

El siguiente paso es la construcción de un sistema de ecuaciones global a partir de las expresiones deducidas en las secciones anteriores. El acoplamiento será realizado a través de las tensiones $\mathbf{q}^{sj} = -\mathbf{q}^{pj}$ a lo largo de la interfase pilote-suelo y de los desplazamientos \mathbf{u}^{pj} a lo largo del pilote j .

La ec. (2.23), escrita para el pilote j , puede ser expresada ahora como:

$$\bar{\mathbf{K}}^{pj} \mathbf{u}^{pj} - \mathbf{F}_{pj} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^{sj} = \mathbf{F}_{top}^j \quad (2.24)$$

Imponiendo condiciones de compatibilidad y equilibrio soldados a lo largo de las interfases pilote-suelo, y tomando como criterio de signos que las tensiones \mathbf{q}^s son positivas, las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.6) y (2.24) puede ser reordenadas en un único sistema de ecuaciones que representará al sistema suelo – cimentación pilotada. Este sistema acoplado será de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ss} & -\mathbf{G}^{sp} & \Upsilon^s & \emptyset \\ \mathbf{H}^{ps} & -\mathbf{G}^{pp} & \Upsilon^p & \mathbf{C}' \\ \mathbf{H}_e^{ps} & -\mathbf{G}_e^{pp} & \Upsilon_{b_3}^p & \mathbf{D}' \\ \emptyset & \mathbf{Q} & -\mathbf{I}' & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{q}^s \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{u}^p \end{bmatrix} = \mathcal{B} \quad (2.25)$$

donde \mathbf{H}^{ss} es la matriz de dimensiones $3N \times 3N$ obtenida mediante la integración, sobre los elementos de contorno, del producto de la solución fundamental armónica en tensiones por las funciones de forma correspondientes, cuando la carga es aplicada sobre los contornos; N es el número de nodos en el contorno; \mathbf{D}' es una matriz constituida por los distintos vectores \mathbf{D} ; \mathbf{C}' es una matriz que contiene los términos libres correspondientes a la colocación sobre los nodos del pilote; e \mathbf{I}' es una matriz llena de elementos nulos excepto en los términos correspondientes a las incógnitas F_{pj} , donde se coloca un término de valor unidad. El resto de las submatrices son:

$$\mathbf{G}^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{p_1 p_1} & \mathbf{G}^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}^{p_2 p_1} & \mathbf{G}^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}^{p_n p_1} & \mathbf{G}^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_e^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e^{p_1 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}_e^{p_2 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_e^{p_n p_1} & \mathbf{G}_e^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon^p = \begin{bmatrix} \Upsilon^{p_1 1} & \Upsilon^{p_1 2} & \dots & \Upsilon^{p_1 n} \\ \Upsilon^{p_2 1} & \Upsilon^{p_2 2} & \dots & \Upsilon^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon^{p_n 1} & \Upsilon^{p_n 2} & \dots & \Upsilon^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{b_3}^p = \begin{bmatrix} \Upsilon_{b_3}^{p_1 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_1 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_1 n} \\ \Upsilon_{b_3}^{p_2 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_2 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{b_3}^{p_n 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_n 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{sp} = [\mathbf{G}^{sp1} \quad \mathbf{G}^{sp2} \quad \dots \quad \mathbf{G}^{spn}]$$

$$\mathbf{\Upsilon}^s = [\mathbf{\Upsilon}^{s1} \quad \mathbf{\Upsilon}^{s2} \quad \dots \quad \mathbf{\Upsilon}^{sn}]$$

$$\mathbf{H}^{ps} = [\mathbf{H}^{p1s} \quad \mathbf{H}^{p2s} \quad \dots \quad \mathbf{H}^{pns}]^T$$

$$\mathbf{H}_e^{ps} = [\mathbf{H}_e^{p1s} \quad \mathbf{H}_e^{p2s} \quad \dots \quad \mathbf{H}_e^{pns}]^T$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{p1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{Q}^{p2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \mathbf{Q}^{pn} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{p1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \bar{\mathbf{K}}^{p2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \bar{\mathbf{K}}^{pn} \end{bmatrix}$$

\mathcal{B} es el vector del lado derecho, obtenido de aplicar las condiciones de contorno, mientras que el vector de incógnitas es:

$$\mathbf{x} = \{ \mathbf{u}^s, \mathbf{q}^{s1}, \mathbf{q}^{s2}, \dots, \mathbf{q}^{sn}, F_{p1}, F_{p2}, \dots, F_{pn}, \mathbf{u}^{p1}, \mathbf{u}^{p2}, \dots, \mathbf{u}^{pn} \}^T \quad (2.26)$$

2.1.5 Formulación del encepado rígido

En este trabajo en concreto, se considerará que los pilotes están fijamente conectados a un encepado rígido. Las restricciones cinemáticas entre los distintos pilotes, junto a las ecuaciones de equilibrio del conjunto, son presentadas en las siguientes secciones.

2.1.5.1 Restricciones cinemáticas

La vinculación de los desplazamientos de las cabezas de los pilotes de un grupo es ejecutada definiendo las ecuaciones de movimiento de sólido rígido y, posteriormente, condensando los grados de libertad deseados. Con el objetivo de simplificar la implementación, los grados de libertad definidos sobre las cabezas de algunos pilotes serán los utilizados como referencia para condensar el resto de grados de libertad. Sólo existen cinco grados de libertad en la cabeza de un pilote, mientras que se necesitan seis grados de libertad (tres desplazamientos y tres rotaciones) para representar el comportamiento del encepado rígido, por lo que se utilizarán dos pilotes. Éstos serán denominados como *pilote de referencia* y *pilote periférico*, siendo este último necesario tan solo para la definición de la rotación del encepado alrededor de un eje vertical.

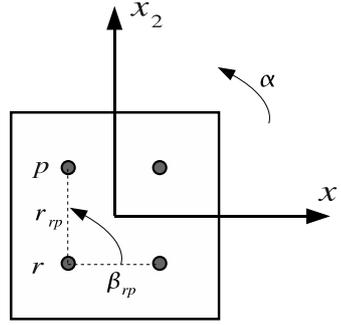


Figura 2.4: Pilote de referencia (r) y pilote periférico (p)

Sean β_{rp} y r_{rp} el ángulo y la distancia existentes entre las cabezas de los pilotes de referencia y periférico (véase la fig. 2.4). Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$u_{p_1} = u_{r_1} - r_{rp}\alpha \sin(\beta_{rp}) \quad (2.27a)$$

$$u_{p_2} = u_{r_2} + r_{rp}\alpha \cos(\beta_{rp}) \quad (2.27b)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican desplazamientos a lo largo de los ejes x_1 y x_2 , respectivamente. De este modo, el ángulo α de rotación del encepado puede ser definido entre ambos pilotes como:

$$si \begin{cases} 45^\circ \leq \beta_{rp} \leq 135^\circ \\ 225^\circ \leq \beta_{rp} \leq 315^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{r_1} - u_{p_1}}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \quad (\text{caso a})$$

$$si \begin{cases} 315^\circ \leq \beta_{rp} \leq 45^\circ \\ 135^\circ \leq \beta_{rp} \leq 225^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{p_2} - u_{r_2}}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \quad (\text{caso b}) \quad (2.28)$$

de tal modo que en el caso a, el grado de libertad auxiliar del pilote periférico es u_{p_1} , mientras que en el caso b, el grado de libertad utilizado es u_{p_2} . Ahora, teniendo en cuenta el conjunto de grados de libertad elegidos para representar el comportamiento del encepado rígido, el acoplamiento entre los pilotes de referencia y periférico puede expresarse, para los casos a y b respectivamente, a través de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} u_{p_2} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(\beta_{rp})^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp})^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp_1} & -d_{rp_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{p_1} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(\beta_{rp}) & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp}) \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp_1} & -d_{rp_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde $d_{rp_i} = x_{p_i} - x_{r_i}$, siendo \mathbf{x} el vector de posición del punto de interés. Sean ahora β_{rj} y r_{rj} el ángulo y la distancia existentes entre la cabeza del pilote de referencia y la de cualquier otro pilote j . Las matrices de acoplamiento, para los casos a y b, son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 1 - \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

donde $d_{rj_i} = x_{j_i} - x_{r_i}$. Tal y como ya se ha dicho, estas matrices son utilizadas para condensar los grados de libertad definidos en las cabezas de los pilotes de un grupo en sólo seis grados de libertad de referencia.

2.1.5.2 Ecuaciones de equilibrio

Se deben imponer condiciones de equilibrio dinámico sobre el encepado entre las fuerzas externas, las fuerzas de inercia y las reacciones en la cabeza de los pilotes. Sean F_i^e las fuerzas externas aplicadas sobre el centro de gravedad del encepado \mathbf{x}_{cg}^c en dirección i , y M_1^e , M_2^e y M_3^e los momentos externos aplicados alrededor de los ejes x_2 , x_1 y x_3 , respectivamente. Las propiedades inerciales del encepado son su masa m^c , y sus momentos de inercia I_1 , I_2 e I_3 definidos alrededor de los ejes x_2 , x_1 y x_3 , respectivamente. Finalmente, las reacciones en la cabeza del pilote j -ésimo son las fuerzas F_{j_i} y los momentos M_{j_1} y M_{j_2} definidos alrededor de los ejes x_2 y x_1 , respectivamente. Con esta nomenclatura, las ecuaciones de equilibrio dinámico del encepado c pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} F_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} F_{j_i} &= -\omega^2 m^c u_{cg_i} & i = 1, 2, 3 \\ M_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} (M_{j_i} - (x_{j_i} - x_{cg_i})F_{j_3} + (x_{j_3} - x_{cg_3})F_{j_i}) &= -\omega^2 I_i \theta_i & i = 1, 2 \\ M_3^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} ((x_{j_1} - x_{cg_1})F_{j_2} - (x_{j_2} - x_{cg_2})F_{j_1}) &= -\omega^2 I_3 \alpha & (2.33) \end{aligned}$$

donde n_p^c es el número de pilotes agrupados bajo el encepado c .

2.1.6 Ensamblaje de la matriz global del sistema

La manera en que las ecuaciones (2.23), (2.3), (2.4) y (2.6) son reorganizadas en un único sistema de ecuaciones depende de la configuración de estructuras, cimentaciones y suelos, y de las condiciones de contorno. Sin embargo, siempre deben aplicarse las condiciones de equilibrio y de compatibilidad, considerando contacto soldado entre las diferentes interfases del sistema. En la situación más general, existen cimentaciones compuestas por grupos de pilotes que están embebidos en el terreno, y el sistema está siendo sometido a fuerzas externas o a ondas sísmica. En tal caso, el sistema de ecuaciones es:

$$\mathcal{A} \{ \mathbf{u}^s, \mathbf{p}^s, \mathbf{q}^s, \mathbf{F}_p, \mathbf{u}^p \}^T = \mathcal{B} \quad (2.34)$$

donde \mathcal{A} es la matriz de coeficientes, y \mathcal{B} es el vector del lado derecho, ambos obtenidos después de aplicar las condiciones de contorno y de reordenar las ecuaciones. El vector de incógnitas incluye los desplazamientos \mathbf{u}^s y/o las tensiones \mathbf{p}^s en los nodos correspondientes a los elementos de contorno, las tensiones en la interfase pilote-suelo \mathbf{q}^s , las fuerzas en la punta de los pilotes \mathbf{F}_p y las traslaciones y rotaciones nodales a lo largo del pilote \mathbf{u}^p .

2.1.7 Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga

Siempre que la fuente esté situada fuera de la línea de carga j , las integrales de $\mathbf{u}^* \mathbf{q}^{sj}$ y $\hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{sj}$, definidas sobre la línea de carga Γ_{p_j} , y que aparecen en las ecs. (2.2) y (2.5) respectivamente, son calculadas como integrales monodimensionales extendidas sobre una línea definida por el eje del pilote correspondiente. Por contra, estas mismas integrales poseen una singularidad cuando la fuente está situada sobre la línea que está siendo integrada. En este caso, y para evitar esta singularidad, las integrales se evalúan sobre un cilindro cuyo radio R_p tiene valor $\sqrt{A/\pi}$. Consideremos entonces que la interfase Γ_p entre el pilote (cualquiera que sea su sección) y el suelo es un cilindro de radio R_p , sobre el que existen unas tensiones σ_{ps} . En este caso, el último sumando de la ec. (2.1) incluye integrales del tipo

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \sigma_{ps} d\Gamma_p = \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \frac{\mathbf{q}^s}{2\pi R_p} d\Gamma_p = \frac{1}{2\pi R_p} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \left[\int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p \right] \mathbf{q}_i^s \quad (2.35)$$

donde N_e es el número de elementos en que se ha discretizado la línea de carga, y donde la ec. (2.19) ha sido utilizada para expresar \mathbf{q}^s a lo largo del elemento. La solución fundamental elastodinámica utilizada en este trabajo, que da el desplazamiento en el punto \mathbf{x} y en la dirección k cuando la fuente es aplicada en el punto \mathbf{x}^l y en la dirección l , tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u_{lk}^* &= \frac{1}{4\pi\mu} [\psi \delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}] \\ \psi &= - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(\frac{1}{z_p^2 r^2} - \frac{1}{z_p r} \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{1}{z_s^2 r^2} - \frac{1}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r} \\ \chi &= - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(\frac{3}{z_p^2 r^2} - \frac{3}{z_p r} + 1 \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{3}{z_s^2 r^2} - \frac{3}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r} \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde μ es el módulo de elasticidad transversal, δ_{lk} es la función delta de Kronecker, y $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^l|$. Para este caso específico (véase la fig. 2.5), las derivadas del vector posición $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^l$

son:

$$r_{,1} = \frac{x_1^r}{r} = \frac{R_p \cos(\gamma)}{r} \quad (2.37a)$$

$$r_{,2} = \frac{x_2^r}{r} = \frac{R_p \sin(\gamma)}{r} \quad (2.37b)$$

$$r_{,3} = \frac{x_3^r}{r} \quad (2.37c)$$

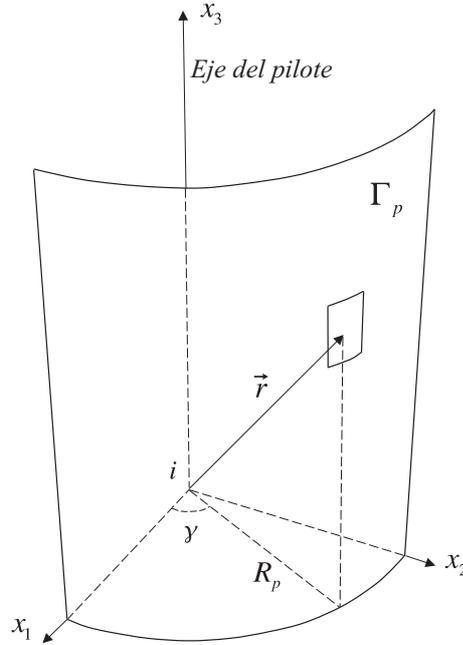


Figura 2.5: Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote

Entonces, las integrales del último término de la ec. (2.35) pueden ser evaluadas, en coordenadas cilíndricas (véase fig. 2.5), como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p &= \int_{x_3^r} \int_{\theta} \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k}r_{,l}] \phi_i R_p d\theta dx_3 \\ &= \frac{R_p}{4\pi\mu} \int_{x_3^r} \left[2\pi\psi\delta_{lk} - \chi \int_0^{2\pi} r_{,k}r_{,l} d\theta \right] \phi_i dx_3 \\ &= \frac{R_p}{4\mu} \int_{x_3^r} \left[2\psi\delta_{lk} - \frac{1}{r^2} \chi \mathbf{R}_{lk} \right] \phi_i dx_3 \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde $x_3^r = x_3 - x_3^k$ y

$$\mathbf{R}_{lk} = \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_3^r)^2 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Ahora, la integral de la ec. (2.35) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\sigma}_{ps} d\Gamma_p = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{L_e}{16\pi\mu} \sum_{i=k,l,m} \left[\int_{-1}^1 \left(2\psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk} \right) \phi_i d\xi \right] \mathbf{q}_i^s \quad (2.40)$$

En cambio, para computar las integrales sobre Γ_{p_j} desde el mismo pilote, también podría adoptarse una estrategia de colocación no nodal. Esto llevará a un procedimiento que permite la reinterpretación de la ecuación anterior. En tal caso, deben elegirse al menos cuatro puntos no nodales, colocados simétricamente alrededor del pilote (tal y como se muestra en la fig. 2.6), para evitar romper la simetría del problema. Se obtiene así, por superposición de las cuatro ecuaciones procedentes de esta estrategia de colocación no nodal, una sola ecuación, que es dividida entre cuatro para mantener el orden de los coeficientes resultantes. En tal caso, e integrando sobre la línea de carga, el último término de la ec. (2.1) se convierte en

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^s d\Gamma_p &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_{x_3^r} (\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k,r,l}) \phi_i dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_{x_3^r} \phi_i \left(\psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk}^n \right) dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{lk}^n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & (-1)^n R_p x_3^r & (x_3^r)^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{lk}^n &= \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & 0 & 0 \\ (-1)^n R_p x_3^r & 0 & (x_3^r)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

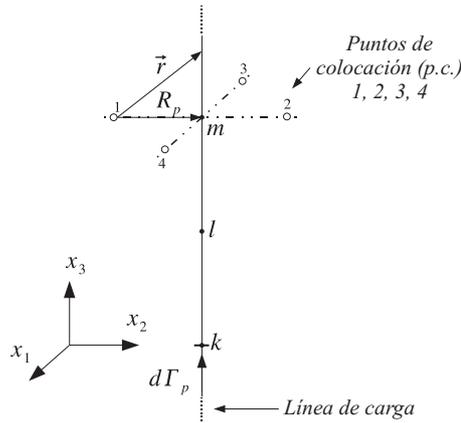


Figura 2.6: Estrategia de colocación no nodal

Tal y como puede apreciarse, este procedimiento lleva a una ecuación completamente equivalente a la ec. (2.40), con lo que se demuestra que ambas aproximaciones son análogas.

Por otro lado, cuando el punto de colocación 'k' está situado fuera de la línea de carga j , puede afirmarse que:

$$\Upsilon_k^j = \{u_{13}^* \ u_{23}^* \ u_{33}^*\}_k \quad (2.43)$$

Sin embargo, cuando el punto de colocación está situado en el nodo inferior de la línea de carga j , y éste coincide con el extremo inferior del pilote, $\Upsilon_k^j F_{pj}$ pasa a contener una singularidad. En tal caso, y para evitar tal singularidad, la fuerza axial en la punta del pilote puede modelarse como una presión uniforme σ_b aplicada sobre una superficie circular con radio $R_p = \sqrt{A/\pi}$. En este trabajo, esta estrategia ha sido utilizada siempre que el punto de colocación está situado a lo largo de la línea de carga j . De este modo, puede escribirse

$$\Upsilon_k^j F_{pj} = \int_{\Gamma_b} u_{i3}^* \sigma_b d\Gamma_b \quad (2.44)$$

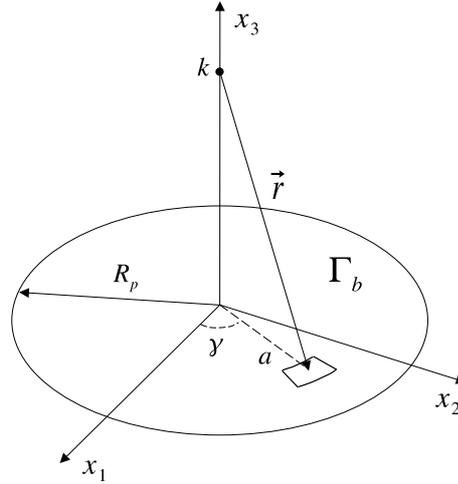


Figura 2.7: Integración sobre la superficie de la punta del pilote

donde Γ_b es la superficie de la punta del pilote y $\sigma_b = F_p/A$. Así, y utilizando coordenadas polares (véase la fig. 2.7), la ec. (2.44) pasa a ser expresada como

$$\begin{aligned} \Upsilon_k^j &= \frac{1}{4\pi\mu A} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_p} [\psi \delta_{i3} - \chi r_{,i} r_{,3}] a da d\theta = \\ &= \frac{1}{2\mu A} \int_0^{R_p} \delta_{i3} \left[\psi - (x_3^r)^2 \frac{\chi}{r^2} \right] a da \quad (2.45) \end{aligned}$$

donde la integral es regular y puede ser evaluada numéricamente.

2.1.8 Obtención de los esfuerzos internos del pilote

Conocido el campo de desplazamientos del pilote \mathbf{u}^p , conocemos todas las variables de la ecuación (2.23). Haciendo uso de esta misma ecuación para un elemento cualquiera del pilote p somos capaces de calcular las fuerzas externas en los nodos exteriores de dicho elemento, representadas en la parte izquierda de la figura 2.3 y que, a su vez, se corresponden por equilibrio a los esfuerzos internos del pilote. En resumen, para cada elemento que compone la línea de carga, podemos obtener los valores de los esfuerzos internos del pilote en dos puntos diferentes (nodos extremos).

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{Q} \mathbf{q}^s + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}^p \quad (2.46)$$

2.2 Modelo Winkler

2.2.1 Introducción

En esta sección se expone un modelo dinámico, basado en el modelo Winkler, para el análisis de la respuesta de una estructura cilíndrica enterrada [1]. El terreno se considera como una división de finas capas horizontales en donde cada una de ellas está sujeta a un problema dinámico de deformación plana. Esto es equivalente a sustituir el suelo por una distribución continua de resortes y amortiguadores en la que los resortes representan la rigidez y los amortiguadores el amortiguamiento debido a la disipación histerética de energía (figura 2.8). De esta representación surgen los llamados modelos dinámicos tipo Winkler para vigas enterradas (BDWF - Beams on Dynamics Winkler Foundation).

A continuación se desarrolla la solución de la ecuación analítica de una viga Euler-Bernoulli enterrada, para un suelo basado en el modelo Winkler. Este modelo nos servirá de apoyo para la validación del modelo BEM-FEM y por extensión de los resultados que en este proyecto se presentan.

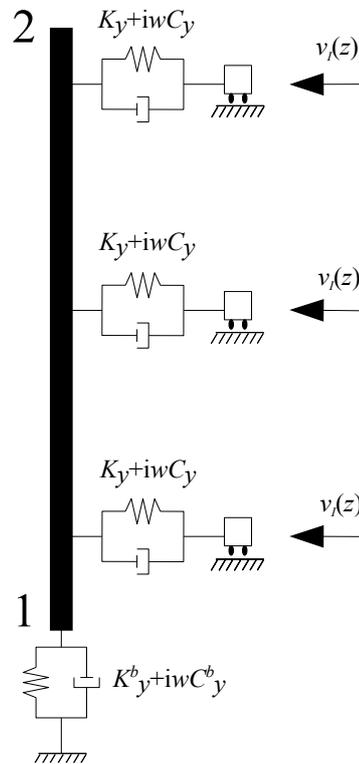


Figura 2.8: Esquema de viga enterrada en un suelo con modelo Winkler

2.2.2 Solución de la ecuación analítica de una viga Euler-Bernoulli sometida a ondas SH de incidencia vertical y con un modelo Winkler para el suelo

Se supone una estructura esbelta embebida en un semiespacio, la cual se considera como una viga Euler-Bernoulli (ver figura 2.9). Esta última consideración implica que la deformada no depende del cortante, la matriz de rigidez es la misma pero siendo el valor de ϕ nulo.

Considerando las fuerzas de inercia, así como las fuerzas producidas por la existencia de un

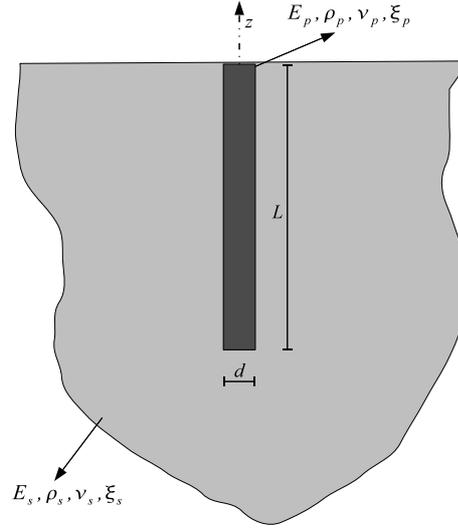


Figura 2.9: Estructura esbelta embebida en un semiespacio

campo de ondas incidentes v_I actuando sobre los resortes y amortiguadores \mathcal{K} , como fuerzas externas actuando sobre la sección, y escribiendo la ecuación de equilibrio dinámico para una porción diferencial de viga, obtenemos

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho A \omega^2 v = \mathcal{K} (v_I - v) \quad (2.47)$$

donde $\mathcal{K} = k_x + i\omega c_x$, $v = v(\omega, z)$. Estos valores de k_x y c_x son complejos y dependen de la frecuencia ω . Además, requieren de un proceso elaborado de cálculo, por lo que tomaremos los desarrollados por Novak et al [1], y para la punta del pilote nos referiremos a los utilizados por Bielak en [18] que fueron calculados por Verbic y Veletsos [2]. El procedimiento de ambos autores para el cálculo de estos parámetros se desarrolla en la Sección 2.2.3.

En el caso de esta ecuación analítica, la cual resolvemos para una ω constante, la solución se simplifica y podemos resolverla analíticamente como vemos a continuación.

Además, el campo incidente para ondas de tipo SH propagándose en dirección vertical en un semiespacio tiene la siguiente expresión:

$$v_I = \frac{1}{2} \left(e^{-ik(z-z_t)} + e^{ik(z-z_t)} \right) \quad (2.48)$$

donde k es el número de onda y z_t es la cota de la superficie libre. Reordenando (2.47) de modo que el término del lado derecho sea conocido

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2) v = \mathcal{K} v_I \quad (2.49)$$

La solución de esta ecuación será del tipo $v = v_h + v_p$, donde v_h representa la solución de la ecuación homogénea, y v_p es cualquier solución particular que verifique la ecuación.

Obtención de la solución homogénea

La solución homogénea es aquella que verifica la siguiente ecuación:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2) v = 0 \quad (2.50)$$

que puede ser escrita como

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \lambda^4 v = 0 \quad (2.51)$$

donde

$$\lambda^4 = \frac{\mathcal{K} - \rho A \omega^2}{E_p I_p} \quad (2.52)$$

cuya solución es del tipo $e^{\alpha z}$, de tal modo que, ensayando dicha solución, podemos escribir la siguiente ecuación característica:

$$\alpha^4 + \lambda^4 = 0 \quad (2.53)$$

de donde

$$\alpha^4 = -\frac{\mathcal{K} - \rho A \omega^2}{E_p I_p} \quad (2.54)$$

que tiene cuatro soluciones complejas que pueden escribirse como

$$\alpha_j = \sqrt[4]{M} e^{i(\theta/4 + (j-1)\pi/2)} \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.55)$$

donde M y θ son el módulo y la fase del número complejo α^4 . De este modo, podemos escribir:

$$u_h = D_1 e^{\alpha_1 z} + D_2 e^{\alpha_2 z} + D_3 e^{\alpha_3 z} + D_4 e^{\alpha_4 z} \quad (2.56)$$

Obtención de la solución particular

Sustituyendo (2.48) en (2.49) obtenemos

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2) v = \mathcal{K} \frac{1}{2} \left(e^{-ik(z-z_t)} + e^{ik(z-z_t)} \right) \quad (2.57)$$

de donde podemos escribir

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2) v = A_I e^{-ikz} + B_I e^{ikz} \quad (2.58)$$

siendo $A_I = 0.5\mathcal{K}e^{ikz_t}$ y $B_I = 0.5\mathcal{K}e^{-ikz_t}$. La solución particular de esta ecuación es del tipo

$$u_p = D_5e^{-ikz} + D_6e^{ikz} \quad (2.59)$$

Sustituyendo en (2.58) y reordenando

$$(k^4 E_p I_p + \mathcal{K} - \rho A \omega^2) (D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz}) = A_I e^{-ikz} + B_I e^{ikz} \quad (2.60)$$

de donde

$$D_5 = \frac{A_I}{k^4 E_p I_p + \mathcal{K} - \rho A \omega^2} \quad ; \quad D_6 = \frac{B_I}{k^4 E_p I_p + \mathcal{K} - \rho A \omega^2} \quad (2.61)$$

Condiciones de contorno y obtención de la solución

Como se dijo anteriormente, la solución de la ecuación (2.49) es del tipo $v = v_h + v_p$. De este modo, ya podemos escribir

$$v = D_1 e^{\alpha_1 z} + D_2 e^{\alpha_2 z} + D_3 e^{\alpha_3 z} + D_4 e^{\alpha_4 z} + D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz} \quad (2.62)$$

de donde D_1 a D_4 son incógnitas. Para obtener el valor de estas incógnitas debemos establecer las condiciones de contorno del problema. Para este ejemplo, consideraremos que los extremos de la estructura están libres, de tal modo que podemos asumir cortante y momento nulos en ambos. Lo cual implica

$$\text{Momento nulo} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad z = z_t \quad (2.63)$$

$$\text{Cortante nulo} \Rightarrow \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad z = z_t \quad (2.64)$$

Con el fin de ser capaces de imponer estas condiciones de contorno, debemos obtener primero las expresiones de las derivadas segunda y tercera de la deflexión como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \alpha_1 D_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2 D_2 e^{\alpha_2 z} + \alpha_3 D_3 e^{\alpha_3 z} + \alpha_4 D_4 e^{\alpha_4 z} + ik \left(-D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \alpha_1^2 D_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2^2 D_2 e^{\alpha_2 z} + \alpha_3^2 D_3 e^{\alpha_3 z} + \alpha_4^2 D_4 e^{\alpha_4 z} - k^2 \left(D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz} \right) \\ \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} &= \alpha_1^3 D_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2^3 D_2 e^{\alpha_2 z} + \alpha_3^3 D_3 e^{\alpha_3 z} + \alpha_4^3 D_4 e^{\alpha_4 z} + ik^3 \left(D_5 e^{-ikz} - D_6 e^{ikz} \right) \end{aligned}$$

Aplicando condiciones de contorno obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\bullet \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z=0) = 0 : \quad D_1 \alpha_1^2 + D_2 \alpha_2^2 + D_3 \alpha_3^2 + D_4 \alpha_4^2 = k^2(D_5 + D_6) \quad (2.65a)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z=z_t) = 0 : \quad \alpha_1^2 D_1 e^{\alpha_1 z_t} + \alpha_2^2 D_2 e^{\alpha_2 z_t} + \alpha_3^2 D_3 e^{\alpha_3 z_t} + \alpha_4^2 D_4 e^{\alpha_4 z_t} = k^2 (D_5 e^{-ikz_t} + D_6 e^{ikz_t}) \quad (2.65b)$$

$$\bullet \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}(z=0) = 0 : \quad D_1 \alpha_1^3 + D_2 \alpha_2^3 + D_3 \alpha_3^3 + D_4 \alpha_4^3 = ik^3(-D_5 + D_6) \quad (2.65c)$$

$$\bullet \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}(z=z_t) = 0 : \quad \alpha_1^3 D_1 e^{\alpha_1 z_t} + \alpha_2^3 D_2 e^{\alpha_2 z_t} + \alpha_3^3 D_3 e^{\alpha_3 z_t} + \alpha_4^3 D_4 e^{\alpha_4 z_t} = ik^3 (-D_5 e^{-ikz_t} + D_6 e^{ikz_t}) \quad (2.65d)$$

que constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (D_1 a D_4) que puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ \alpha_1^2 e^{\alpha_1 z_t} & \alpha_2^2 e^{\alpha_2 z_t} & \alpha_3^2 e^{\alpha_3 z_t} & \alpha_4^2 e^{\alpha_4 z_t} \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \\ \alpha_1^3 e^{\alpha_1 z_t} & \alpha_2^3 e^{\alpha_2 z_t} & \alpha_3^3 e^{\alpha_3 z_t} & \alpha_4^3 e^{\alpha_4 z_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2(D_5 + D_6) \\ k^2(D_5 e^{-ikz_t} + D_6 e^{ikz_t}) \\ ik^3(-D_5 + D_6) \\ ik^3(-D_5 e^{-ikz_t} + D_6 e^{ikz_t}) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Si resolvemos este sistema, obtenemos los coeficientes D_1 , D_2 , D_3 y D_4 . Sustituyendo estos coeficientes junto a D_5 y D_6 en la ecuación (2.62) conocemos finalmente el campo de desplazamientos.

Por último, para la validación del modelo que se utiliza en este trabajo debemos obtener el valor del momento flector en función de la profundidad, para el ejemplo estudiado. El cálculo de dicho esfuerzo viene definido por,

$$M(z) = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} EI \quad (2.67)$$

por lo que,

$$M(z) = [D_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 z} + D_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 z} + D_3 \alpha_3^2 e^{\alpha_3 z} + D_4 \alpha_4^2 e^{\alpha_4 z} + D_5 \alpha_5^2 e^{\alpha_5 z} + D_6 \alpha_6^2 e^{\alpha_6 z}] EI \quad (2.68)$$

2.2.3 Desarrollo de la rigidez compleja horizontal de Novak et al. [1] y de la función de impedancia de Verbic y Veletsos [2]

Supongamos una viga de sección cilíndrica de diámetro D embebida en un estrato, apoyada en una base rígida y sometida a una carga dinámica $q(t)$ en la cabeza, ver figura 2.10. La viga

2 Metodología

es un sólido elástico con módulo de elasticidad E_p y radio R . Se considera el medio en el que se encuentra enterrada como homogéneo e isótropo de profundidad L , módulo de elasticidad E_s , módulo de Poisson ν_s , densidad ρ_s y amortiguamiento histerético β_s .

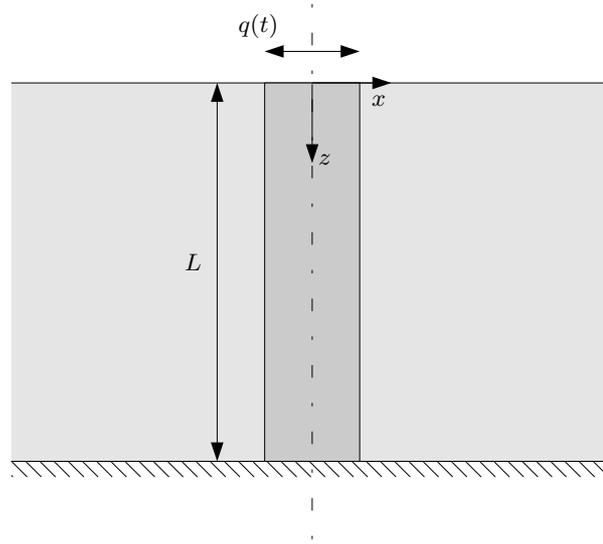


Figura 2.10: Diagrama para la definición del problema

En el caso de un problema de deformación plana, las ecuaciones de equilibrio, en coordenadas cilíndricas, de un medio que oscila armónicamente son según Novak en [1],

$$\eta^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \left(\frac{\omega}{c_s^*} \right)^2 u = 0 \quad (2.69a)$$

$$\eta^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \left(\frac{\omega}{c_s^*} \right)^2 v = 0 \quad (2.69b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \left(\frac{\omega}{c_s^*} \right)^2 w = 0 \quad (2.69c)$$

Las ecuaciones (2.69a) y (2.69b) representan el equilibrio frente a oscilaciones laterales, mientras que la ecuación (2.69c) el equilibrio en la dirección del eje vertical. ω es la frecuencia de vibración y c_s^* la velocidad de propagación de la onda de cortante cuya expresión compleja es

$$c_s^* = c_s \sqrt{1 + 2i\beta_s} \quad (2.70)$$

η representa la relación entre la velocidad de propagación c_p de la onda volumétrica y la velocidad de propagación c_s de la onda de cortante.

$$\eta = \frac{c_p}{c_s} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu_s)}{1 - 2\nu_s}} \quad (2.71)$$

Si nos centramos en el problema con una carga dinámica horizontal en la cabeza, la expresión de la impedancia propuesta por Novak [1] es

$$k_h = \pi G a_o^2 T \quad (2.72)$$

siendo G el módulo de rigidez transversal y

$$T = -\frac{4K_1(b_o^*)K_1(a_o^*) + a_o^*K_1(b_o^*)K_o(a_o^*) + b_o^*K_o(b_o^*)K_1(a_o^*)}{b_o^*K_o(b_o^*)K_1(a_o^*) + a_o^*K_1(b_o^*)K_o(a_o^*) + b_o^*a_o^*K_o(b_o^*)K_o(a_o^*)} \quad (2.73)$$

K_o y K_1 son funciones modificadas de Bessel de segundo tipo de argumento complejo

$$a_o^* = \frac{a_o i}{\sqrt{1 + 2i\beta_s}} \quad ; \quad b_o^* = \frac{a_o i}{\eta\sqrt{1 + 2i\beta_s}} \quad (2.74)$$

donde a_o es la frecuencia adimensional

$$a_o = \frac{\omega R}{c_s} \quad (2.75)$$

Sabiendo que la forma compleja del módulo de elasticidad transversal es

$$G^* = G(1 + 2i\beta_s) \quad (2.76)$$

y teniendo en cuenta la expresión de a_o^* en (2.74), la expresión (2.72) se convierte en

$$k_h = -\pi G^* (a_o^*)^2 T \quad (2.77)$$

Separando la parte real e imaginaria de T , la ecuación (2.77) se reescribe como

$$k_h = G\delta_h(1 + 2i\beta_h) \quad (2.78)$$

siendo δ_h y β_h coeficientes reales dependientes de la frecuencia que representan la rigidez y el amortiguamiento, respectivamente.

Por otra parte, en la punta del pilote se define una rigidez diferente, a parte de la calculada para la carga dinámica horizontal, ya que esta se encuentra apoyada sobre una base rígida. Para definir esta rigidez nos remitimos a lo expuesto por Bielak [18],

Si consideramos

$$P_x(t) = \bar{P}_x e^{i\omega t} \quad ; \quad R_x(t) = \bar{R}_x e^{i\omega t} \quad (2.79)$$

como la fuerza y el momento de excitación, respectivamente y

$$u(t) = \bar{u} e^{i\omega t} \quad ; \quad \phi(t) = \bar{\phi}_x e^{i\omega t} \quad (2.80)$$

como los desplazamientos lateral y angular correspondientes de la viga, la relación entre las fuerzas y los desplazamientos se pueden expresar como

$$\begin{pmatrix} \frac{\bar{P}_x}{G a_o^2} \\ \frac{\bar{R}_x}{G a_o^3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_x(a_o, v) & K_{x\phi}(a_o, v) \\ K_{x\phi}(a_o, v) & K_\phi(a_o, v) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

donde K_j son las funciones de impedancias que buscamos, y vienen dadas por

$$K_j(a_o, \nu) = [\sigma_j k_j(a_o, \nu) + i a_o c_j(a_o, \nu)] \quad , \quad j = x, x\phi, \phi \quad (2.82)$$

En la ecuación (2.82), σ_j representa la rigidez estática adimensional de la viga, k_j mide el ratio entre la rigidez dinámica y sus valores estáticos y c_j está relacionada con la energía radiada al semiespacio elástico. Las funciones k_j y c_j pueden ser calculadas a partir de resultados numéricos para ciertos valores de a_o y del coeficiente de Poisson ν . En el artículo en el que nos hemos basado para la obtención de la rigidez en la punta [18], estos valores fueron calculados a partir de las siguientes soluciones aproximadas:

$$k_z = 1 \quad , \quad c_x = b_1 \quad (2.83a)$$

$$k_{x\phi} = 0 \quad , \quad c_{x\phi} = 0 \quad (2.83b)$$

$$k_\phi = 1 - b_1 \frac{(b_2 a_o)^2}{1 + (b_2 a_o)^2} - b_3 a_o^2 \quad (2.83c)$$

$$c_\phi = b_1 b_2 \frac{(b_2 a_o)^2}{1 + (b_2 a_o)^2} \quad (2.83d)$$

Por último, es necesario indicar que los coeficientes b_1 , b_2 y b_3 son funciones adimensionales de ν .

2.3 Obtención de los terremotos sintéticos

Esta sección tiene como objetivo describir el proceso seguido para generar los terremotos sintéticos que se usarán como excitación de las cimentaciones objeto de estudio de este trabajo. Para ello, se seguirá lo dispuesto en la Parte 1 del Eurocódigo 8 [11].

Con el Eurocódigo como guía y dado que no se dispone de ningún terremoto real grabado en la zona se seguirán los pasos para construir terremotos sintéticos. Esto nos lleva a elegir el tipo de suelo en el que se construyen las cimentaciones que aquí se estudian.

El tipo de suelo se puede determinar a través de la velocidad de propagación de la onda en el mismo (c_s). Dado que tenemos tres tipos distintos de suelo, tendremos tres velocidades de propagación diferentes para una relación de densidades ($\rho_p/\rho_s = 0.7$) y un material para el pilote ($E_p = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ y $\rho_p = 2500 \text{ kg/m}^3$) definidos y comunes a todos ellos. Para el suelo definido por la relación $E_p/E_s = 50$ la velocidad es $c_s = 349,93 \text{ m/s}$, para $E_p/E_s = 100$ es $c_s = 247,44 \text{ m/s}$ y para $E_p/E_s = 500$ la velocidad es igual a $c_s = 110.657 \text{ m/s}$.

Entrando en la tabla 3.1 de la mencionada parte del Eurocódigo obtenemos que los suelos correspondientes a $E_p/E_s = 50$ y $E_p/E_s = 100$ se clasifican como Tipo C, y el suelo correspondiente a $E_p/E_s = 500$ se clasifica como Tipo D. Sin embargo, para poder llevar a cabo un análisis paramétrico en el que sean comparables entre si los resultados obtenidos para los distintos suelos, es necesario clasificarlos como un mismo Tipo a todos ellos. De esta manera, se podrá estudiar la influencia de un parámetro dado ya que los demás permanecen constantes. Por ello, se clasifican todos los suelos como Tipo C.

Una vez identificado el tipo de suelo, debemos de introducirnos con éste en la tabla 3.2 del Eurocódigo y obtener los parámetros necesarios para definir por completo el espectro de respuesta máxima (figura 2.11). Por último, con todos estos parámetros y con la ayuda del software *SIMQKE-I* [19], el cual genera terremotos artificiales compatibles con espectros de respuesta dados, generamos el terremoto como una respuesta temporal medida en aceleración.

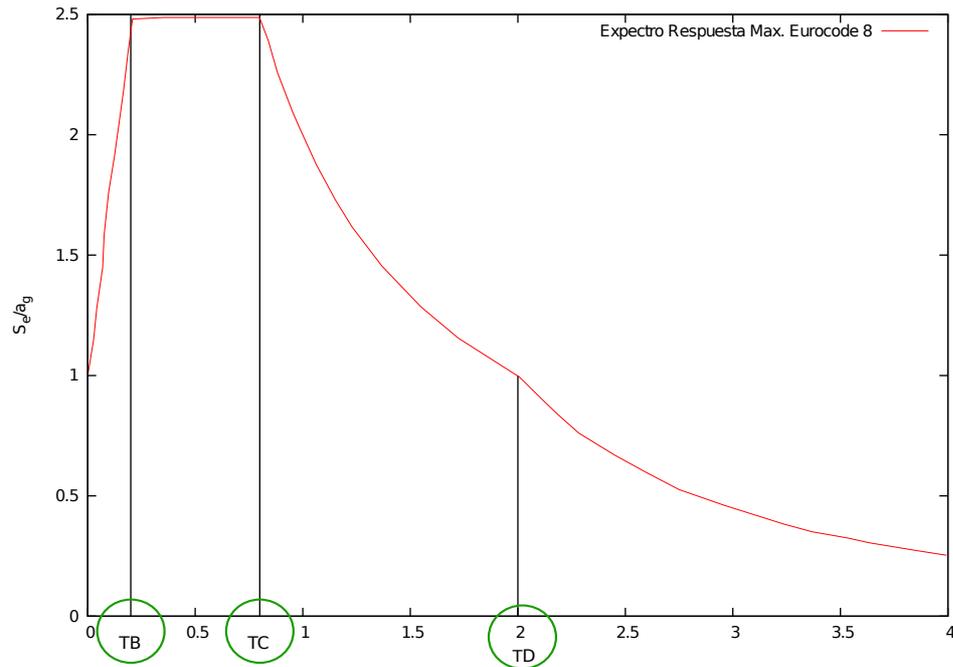


Figura 2.11: Espectro de respuesta máxima

2.4 Tratamiento de los datos

En esta sección veremos los procedimientos que se siguen para el desarrollo de este proyecto y que han sido implementados en lenguaje M en *Matlab*. El tratamiento de los datos constituye la herramienta necesaria para hacer posible la correcta elaboración y visualización del análisis paramétrico a partir de los resultados de las simulaciones realizadas. A modo de esquema de este capítulo nos apoyaremos en el diagrama de la figura 2.12.

En líneas generales disponemos de dos grupos de datos que trataremos de forma distinta.

En primer lugar, tenemos las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF) que obtenemos del modelo BEM-FEM (sección 2.1). Estas FRFs representan el grueso del presente trabajo y nos proporcionan valores, en función de la frecuencia de excitación, de los factores de interacción cinemática de la cimentación escogida y de los esfuerzos internos en cada pilote que compone la misma a una profundidad determinada.

Por otro lado, tenemos los acelerogramas artificiales utilizados para excitar las diferentes cimentaciones estudiadas en este proyecto. Estos terremotos se miden en base a la aceleración que provocan en cada instante de tiempo $a = f(t)$ y se corresponden con los descritos en la sección 2.3.

El tratamiento de estos dos grupos de datos hace posible que se obtengan las figuras que se presentan como resultados de este proyecto, desde aquellas utilizadas para validar el código hasta las envolventes de esfuerzos, pasando por la representación de los factores de interacción cinemática y las FRFs.

El mayor trabajo de tratamiento de datos lo requiere la obtención de las envolventes de esfuerzos, que combina las FRFs de los esfuerzos internos de los pilotes de la cimentación con los acelerogramas artificiales. Para obtener estas envolventes de esfuerzos debemos tratar ambos grupos de datos por separado para poder combinarlos correctamente.

2 Metodología

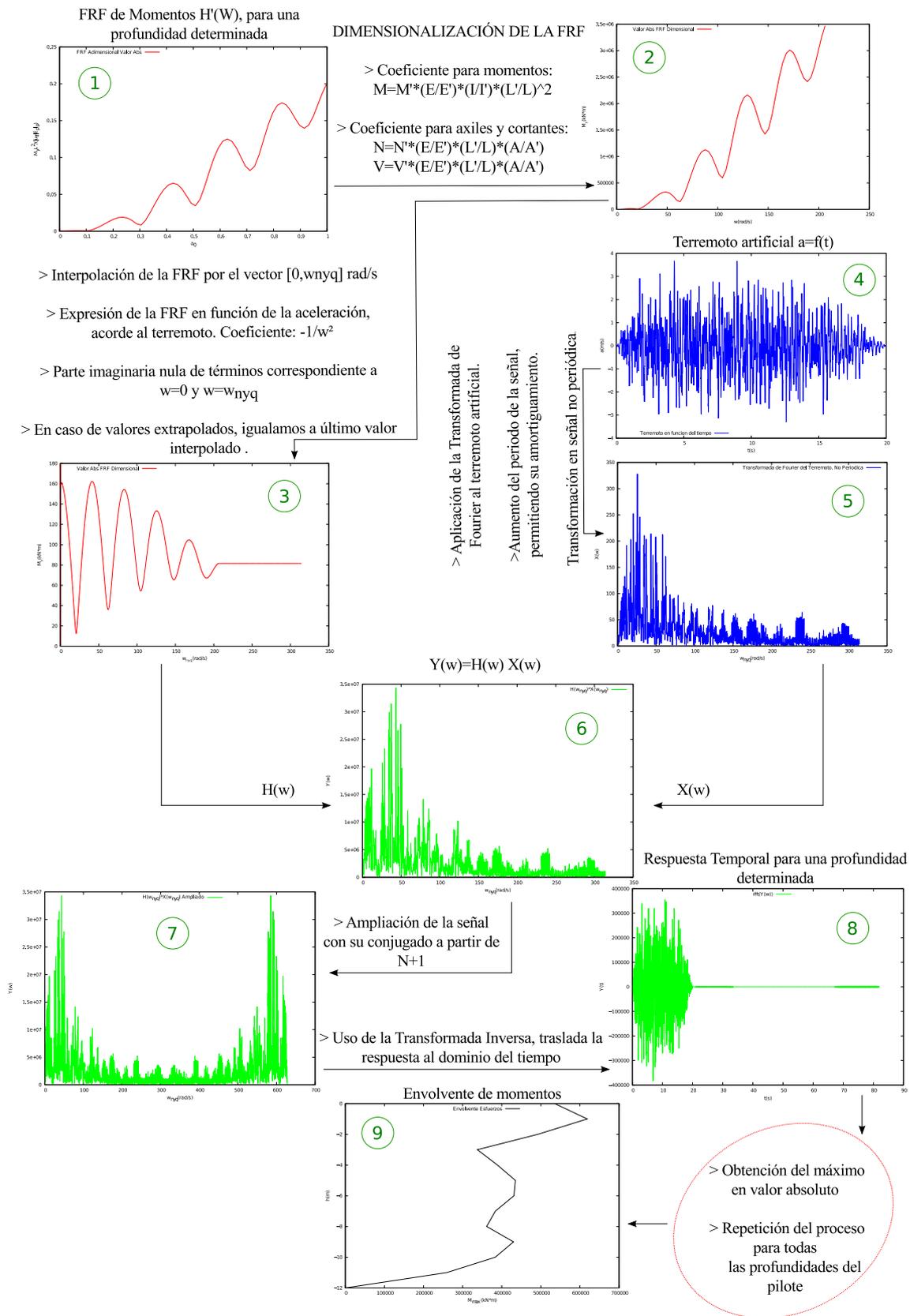


Figura 2.12: Diagrama de Flujo

Las funciones de respuesta en frecuencia de los esfuerzos internos en los pilotes, tienen carácter adimensional (*Punto 1* Figura 2.12), es decir, no representan un ejemplo determinado, sino que representan todos aquellos que guardan la misma configuración y las mismas relaciones adimensionales. Las configuraciones que se estudian en este proyecto son la de cimentación enterrada compuesta por un pilote simple vertical o inclinado ($10, 20$ o 30°) y con el giro restringido en su cabeza y la de cimentación enterrada compuesta por un grupo de 2×2 pilotes verticales o inclinados ($10, 20$ o 30°) unidos por un encepado rígido. En cuanto a las relaciones adimensionales, estas se definen como ratios entre parámetros del suelo y de la cimentación. Se han establecido tres ratios que caracterizan las relaciones entre estos elementos. El primero de ellos recoge la relación entre el módulo de elasticidad del pilote y del suelo E_p/E_s , el segundo establece el ratio entre las densidades de suelo y pilote ρ_s/ρ_p y, por último, para la configuración de grupo de pilotes, se define la relación entre la separación entre pilotes en el encepado y el diámetro de los pilotes s/d . Estos últimos parámetros geométricos se presentan en la figura 2.13.

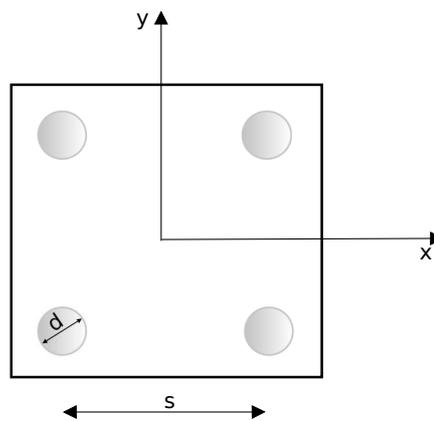


Figura 2.13: Encepado 2×2

En el BEM-FEM se analiza un caso con una configuración acorde a los ratios anteriormente definidos. Los datos que resultan de este análisis se adimensionalizan aplicando unos coeficientes determinados, teniendo en cuenta si se trata de magnitudes que se miden en unidades de fuerza (esfuerzos axiales y cortantes) o de magnitudes que se miden en unidades de fuerza por desplazamiento (momentos flectores). Tal y como se especifica en los ejes de las figuras del apéndice A, y teniendo en cuenta que la frecuencia ω ya es adimensional, los coeficientes utilizados son:

- Coeficiente de momentos: $L'^2/E'I'u_{ff}$
- Coeficiente de axiles y cortantes: $L'/E'A'u_{ff}$

Donde L' representa la longitud del pilote en el caso inicial, E' se define como el módulo de elasticidad del pilote, I' como la inercia del mismo, A' es el área del pilote y u_{ff} representa el desplazamiento del campo libre, definido como la unidad en la superficie.

Este proceso permite representar FRFs adimensionales que pueden entenderse como universales, válidas para cualquier caso con las mismas relaciones adimensionales. Para obtener las FRFs para un caso concreto, estas se dimensionalizan multiplicándolas por el factor correspondiente,

- Coeficiente de momentos: $EI\ddot{u}_{ff}/L^2$

- Coeficiente de axiles y cortantes: $EA\ddot{u}_{ff}/L$

Agregando a lo anterior, una vez dimensionalizadas las funciones de respuesta en frecuencia de los esfuerzos internos en los pilotes (*Transición entre Punto 1 y Punto 2* Figura 2.12), debemos adaptar éstas a los datos de los acelerogramas artificiales para luego poder combinar ambos grupos de datos correctamente (*Transición entre Punto 2 y Punto 3* Figura 2.12).

Para adaptar los datos de las FRFs a los de las excitaciones, principalmente debemos de ponerlos en términos de aceleración, que es como están medidos los terremotos, mientras que las FRFs están en un principio en términos de desplazamiento, ecuación (2.87).

Para empezar definimos el desplazamiento temporal u_t , como el desplazamiento en función de la frecuencia $U(w)$ por una exponencial compleja que depende también de la frecuencia e^{iwt} , (2.84). Para obtener la expresión del desplazamiento en función de la frecuencia como función de la aceleración se deriva (2.84) respecto del tiempo dos veces, obteniendo así (2.86). Hecho esto, en la ecuación (2.87) se observa que el coeficiente que relaciona el desplazamiento en función de la frecuencia en términos de desplazamiento con el desplazamiento en función de la frecuencia en términos de aceleración es $-1/w^2$.

$$u(t) = U(w) e^{iwt} \quad (2.84)$$

$$\dot{u}(t) = iwU(w) e^{iwt} \quad (2.85)$$

$$\ddot{u}(t) = -w^2 U(w) e^{iwt} \quad (2.86)$$

$$\frac{u(t)}{\ddot{u}(t)} = -\frac{1}{w^2} \quad (2.87)$$

En síntesis, obtenemos las FRFs dimensionales de la siguiente manera,

$$FRF_d(w) = FRF_a(w) \cdot F \cdot (-w^{-2}) \quad (2.88)$$

donde F representa el factor utilizado. Por ejemplo, la FRF dimensional de momentos se obtiene como,

$$M \cdot \frac{L^2}{EI' u_{ff}} \cdot \frac{EI \ddot{u}_{ff}}{L^2} \cdot \frac{-1}{w^2} \quad (2.89)$$

Por otra parte, es necesario dimensionalizar también la frecuencia a la que corresponde cada esfuerzo. En este caso el coeficiente dependerá del suelo y del diámetro de los pilotes del ejemplo elegido. Este viene dado por la definición de la frecuencia adimensional a_o , donde según la ecuación (2.91), se determina que el coeficiente buscado es c_s/d .

$$a_o = \frac{wd}{c_s} \quad (2.90)$$

$$w = a_o \frac{c_s}{d} \quad (2.91)$$

Además, debemos de disponer de un valor de FRF por cada valor de excitación. Esto se consigue interpolando las FRFs por el vector de frecuencias que va desde cero hasta la w_{nyq} , $[0, \dots, w_{nyq}]$. En este paso hay que poner especial atención a la frecuencia máxima w_{max} de las funciones de respuesta en frecuencia que se están interpolando. Si ésta es menor que la frecuencia de Nyquist w_{nyq} los valores situados entre ambas estarán siendo extrapolados, alterando la FRF original. Como solución a este efecto, igualamos los valores que quedan entre w_{max} y w_{nyq} al correspondiente al más cercano por la izquierda a w_{max} . Sin embargo, esto último no tiene efecto ya que a altas frecuencias el coeficiente $-1/w^2$ tiende a cero y dichos valores comprendidos entre w_{max} y w_{nyq} no tienen peso en la respuesta, hecho que se ha comprobado en diversos casos.

Por último, deberemos de hacer nulas las componentes imaginarias de los datos correspondientes a las frecuencias nula y de Nyquist, llegando así al *Punto 3* Figura 2.12. Esta operación es un requisito necesario para que la FFT inversa de una FRF sea una función real.

El tratamiento de los acelerogramas artificiales comienza en el *Punto 4* de la Figura 2.12. En éste se observa cómo los datos que componen los terremotos artificiales inicialmente dependen del tiempo. Sin embargo, para poder combinar estos con las FRFs debemos de trabajar en el dominio de la frecuencia. Por ello, debemos de trasladar este grupo de datos a dicho dominio.

Para transformar los acelerogramas al dominio de la frecuencia hacemos uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), algoritmo que permite calcular la Transformada Discreta de Fourier de manera eficiente. Esta transformada es de tiempo discreto y dado que la señal de la excitación es aperiódica, esta será tratada como periódica [20]. Además, antes de aplicar la FFT a la señal alargamos la misma con ceros al final, permitiendo así el amortiguamiento de su respuesta consiguiendo que no influya su carácter periódico.

Una vez transformada la excitación al dominio de la frecuencia, para un dt de la señal original conocido, conoceremos también la frecuencia máxima en Hz y por lo tanto tendremos el también el vector de frecuencias, w , en rad/s para dicha transformada [20]. Sin embargo, sabemos que no disponemos de información mas allá de la Frecuencia de Nyquist w_{nyq} , que corresponde a la posición $N/2 + 1$ del vector que contiene la transformada de la excitación.

Así pues, truncando la transformada de la señal en esta posición disponemos finalmente de la forma adecuada de la excitación para poder combinarla con las FRFs. La imagen de (*Punto 5* Figura 2.12) representa los cambios que se han llevado a cabo con la excitación.

Considerando un sistema lineal, para obtener la respuesta en el dominio del tiempo, primero debemos de obtener esta en el dominio de la frecuencia para luego aplicar la Transformada Rápida de Fourier Inversa (IFFT). La respuesta de un sistema lineal es el resultado de la multiplicación de la entrada y la función de transferencia (2.92), en nuestro caso, siendo la entrada la transformada de la excitación y la función de transferencia las distintas FRFs (*Punto 6* Figura 2.12).

$$Y(w) = X(w)H(w) \quad (2.92)$$

Para obtener la respuesta temporal del sistema (*Punto 8* Figura 2.12), primero debemos de completar la respuesta en el dominio de la frecuencia con su conjugado a partir de la frecuencia de Nyquist (*Punto 7* Figura 2.12). Así, haciendo uso de la IFFT somos capaces de calcular dicha respuesta.

Para terminar, hallamos el máximo temporal del esfuerzo a la profundidad correspondiente, donde, si se trata de cortantes o flectores lo hacemos en valor absoluto y si se trata de axiles

2 Metodología

diferenciamos entre tracción y compresión. Repitiendo todo el proceso para cada uno de los nodos extremos de los elementos del pilote, para los tres esfuerzos y, si procede, para el resto de pilotes del encepado, obtenemos las envolventes de esfuerzos (*Punto 9* Figura 2.12) que se presentan en el capítulo de resultados del presente proyecto.

3.1 Introducción

Este capítulo recoge principalmente los resultados de los estudios realizados, dejando entrever las primeras conclusiones de los mismos. Para presentar los resultados correctamente, son necesarios varios pasos previos tales como la definición del campo incidente y de los acelerogramas que se utilizan como excitación de los problemas, la descripción del problema en sí y la validación del código utilizado para generarlos.

Para empezar, en la sección 3.2 se describe el problema definiendo claramente las dos configuraciones de cimentación enterrada estudiadas y los parámetros de las mismas. Seguidamente, se presentan los terremotos artificiales generados para excitar tanto a los problemas previamente descritos como a los casos elegidos para validar el modelo utilizado, todo ello incluido en la sección 3.3. A continuación, en la sección 3.4 se valida el modelo BEM-FEM mediante la comparación de los resultados obtenidos con este código con los obtenidos haciendo uso del modelo Winkler y con los presentados por Dezi et al. [3]. Por último, en las secciones 3.5, 3.6 y 3.7 se presentan y analizan los resultados en forma de envolventes de esfuerzos, factores de interacción cinemática y Funciones de Respuesta en Frecuencia de los esfuerzos internos respectivamente. Dado el número de figuras que son necesarias, las FRFs están recogidas en el apéndice A.

3.2 Descripción del problema

3.2.1 Definición del problema

El objetivo de este proyecto es estudiar los esfuerzos internos en una cimentación enterrada con pilotes inclinados cuando estos se someten a excitaciones sísmicas. Para llevar a cabo este estudio se han considerado dos modelos de cimentaciones pilotadas. La primera de ellas consta de un pilote simple inclinado con el giro restringido en la cabeza (figura 3.1), y el segundo modelo está compuesto por un grupo de 2×2 pilotes inclinados unidos por un encepado rígido en su cabeza (figura 3.2).

Las características geométricas para el pilote simple se definen en base al diámetro del pilote d , la longitud del mismo L y la inclinación respecto a la vertical θ , donde 0° significa pilote vertical. Además, para el grupo de pilotes, añadimos la longitud s que mide la distancia entre pilotes dentro del encepado.

Las distintas cimentaciones enterradas son excitadas por ondas de tipo SH. Estas ondas han

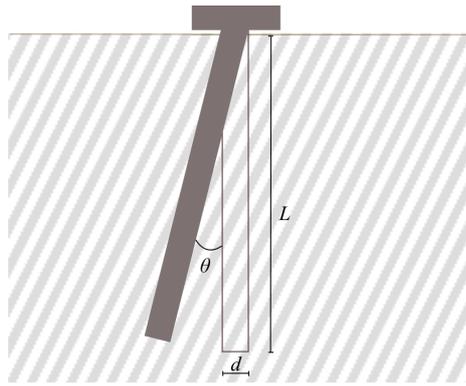


Figura 3.1: Descripción geométrica del problema del pilote simple inclinado con giro impedido en la cabeza

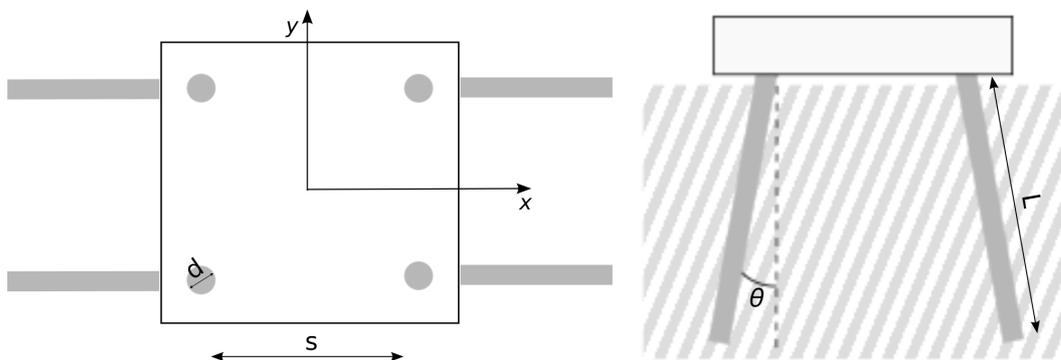


Figura 3.2: Descripción geométrica del problema del grupo de 2×2 pilotes inclinados unidos por un encepado rígido en su cabeza

sido elegidas de tal manera que produzcan desplazamientos paralelos al eje x. Por ello, y para poder estudiar correctamente la influencia de la inclinación de los pilotes en los esfuerzos internos de los mismos cuando son sometidos a la excitación de este tipo de ondas, estos se inclinan en la dirección del eje x.

3.2.2 Parámetros del problema

Para seguir avanzando en la descripción del problema que se estudia en este trabajo es necesario definir los parámetros utilizados para componer los modelos que se simulan. Los parámetros que a continuación se presentan son de carácter adimensional y constituyen ratios y valores que son representativos de la realidad.

El primero de estos parámetros es el ratio entre los módulos de Young de los pilotes y del suelo E_p/E_s y que en nuestro análisis toma tres valores distintos 50, 100 y 500 ya que estudiamos tres suelos diferentes, de más rígido a menos rígido respectivamente. Además, definimos también el ratio entre la densidad del suelo y la de los pilotes $\rho_s/\rho_p = 0.7$ y para el grupo de pilotes se establece la proporción entre la distancia entre pilotes en el encepado s y el diámetro del pilote d , $s/d = 5$. El último de los ratios es el que relaciona la longitud del pilote con el diámetro del mismo, $L/d = 20$, y que representa la esbeltez del pilote.

Así mismo, establecemos valores de los coeficientes de Poisson del suelo y del pilote $\nu_s = 0.4$

y $\nu_p = 0.25$ y también del coeficiente de amortiguamiento del suelo $\beta = 5\%$. Para finalizar, y como único parámetro dimensional, definimos los valores del ángulo de inclinación de los pilotes $\theta = 0, 10, 20$ y 30° .

También es necesario aclarar que tanto las figuras que corresponden a las funciones de respuesta en frecuencia de los esfuerzos internos, como aquellas que corresponden a los factores de interacción cinemática están representadas en función de la frecuencia adimensional a_0 , que se define como,

$$a_0 = \frac{wd}{c_s} \quad (3.1)$$

donde w es la frecuencia de excitación, d es el diámetro de los pilotes y c_s es la velocidad de propagación de la onda en el terreno.

En resumen, los parámetros adimensionales de los que se hacen uso son los que quedan recogidos en la tabla 3.1.

E_p/E_s	50, 100 y 500
ρ_s/ρ_p	0.7
s/d	5
L/d	20
ν_s	0.4
ν_p	0.25
β	5%
θ	0, 10, 20 y 30°

Tabla 3.1: Resumen de parámetros del problema

Por otra parte, como se explica en la sección 2.4, para representar las envolventes de esfuerzos hemos decidido hacerlo en referencia a dos casos dimensionales. Estos casos, comparten todos los parámetros expuestos en el cuadro 3.1 y además se definen para ellos valores de d , ρ_p y E_p . Para el primero se establece un diámetro $d = 0.6$ m y para el segundo el diámetro es $d = 1.2$ m, siendo para ambos el valor del módulo de Young del pilote, $E_p = 3 \cdot 10^{10}$ N/m² y la densidad del pilote igual a $\rho_p = 2500$ kg/m³.

Por último, según lo expuesto en esta sección podemos afirmar que, en líneas generales, el análisis paramétrico se realiza en base a la variación de tres aspectos: dos parámetros, y la configuración de la cimentación. Los parámetros cuya variación se analiza son, por una parte, el tipo de suelo, estudiado como el ratio entre el módulo de Young del pilote y del suelo E_p/E_s y, por otra, la inclinación de los pilotes, definida como el ángulo que forma cada pilote con la vertical θ . Además, en el estudio de las envolventes de los esfuerzos internos en los pilotes se analiza también la variación en el diámetro de los mismos d . Por ello, en las secciones 3.5 y 3.6 se analiza sistemáticamente la variación de cada uno de estos parámetros mientras el resto permanece constante.

3.3 Definición de los acelerogramas artificiales

Como excitación tanto para los distintos casos que se estudian en este proyecto como para los cuatro casos utilizados para validar el BEM-FEM se ha obtenido una serie de acelerogramas

3 Resultados

artificiales, todos ellos definidos en la superficie. Estos acelerogramas, como se explica en el apartado 2.3, son generados mediante el software *SIMQKE* [19] acordes a un espectro de respuesta máxima que previamente ha sido definido teniendo en cuenta lo expuesto en el *Eurocódigo 8: Parte 1* [11]. En total se ha generado un conjunto de 6 terremotos artificiales. De estos, 3 se han obtenido clasificando el suelo como Tipo A y definiendo un espectro de respuesta elástica de Tipo 1 según [11], y los 3 restantes se han obtenido clasificando el suelo como Tipo C para un espectro de respuesta elástica de Tipo 2. Así, el conjunto de excitaciones está constituido por los acelerogramas A1, A2 y A3, (figura 3.3) y C1, C2 y C3 (figura 3.4).

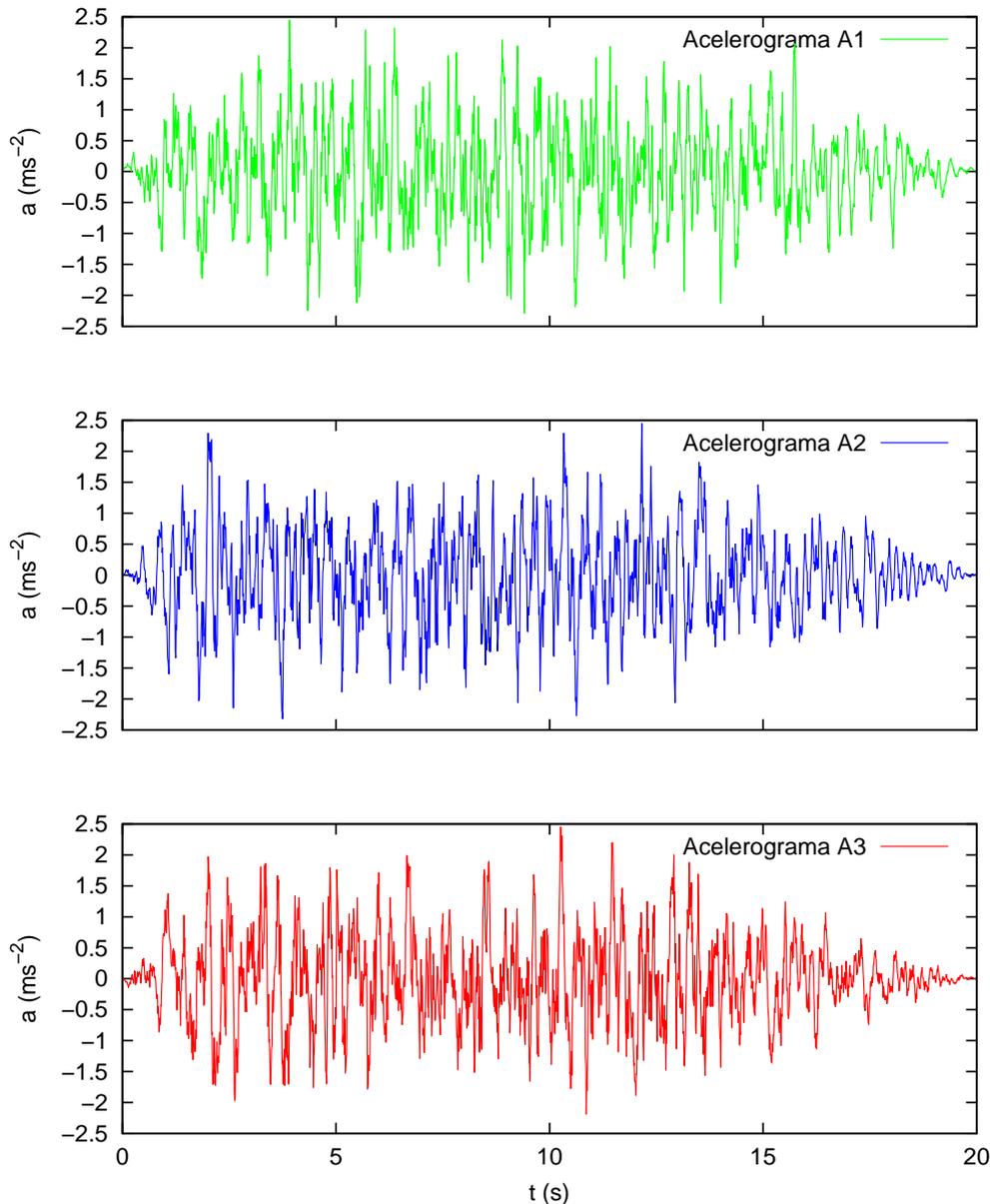


Figura 3.3: Acelerogramas artificiales para suelo Tipo A

De estos seis terremotos artificiales únicamente se utilizarán los tres de tipo C (C1, C2 y C3) para excitar los casos que son objetivo de estudio de este proyecto. Se hará uso de la totalidad de los acelerogramas en el proceso de validación del código 3.4.

Todos los acelerogramas presentados tienen una duración de señal de 20 segundos, sin embargo, la aceleración máxima de cada uno de ellos es distinta en función del Tipo de espectro de

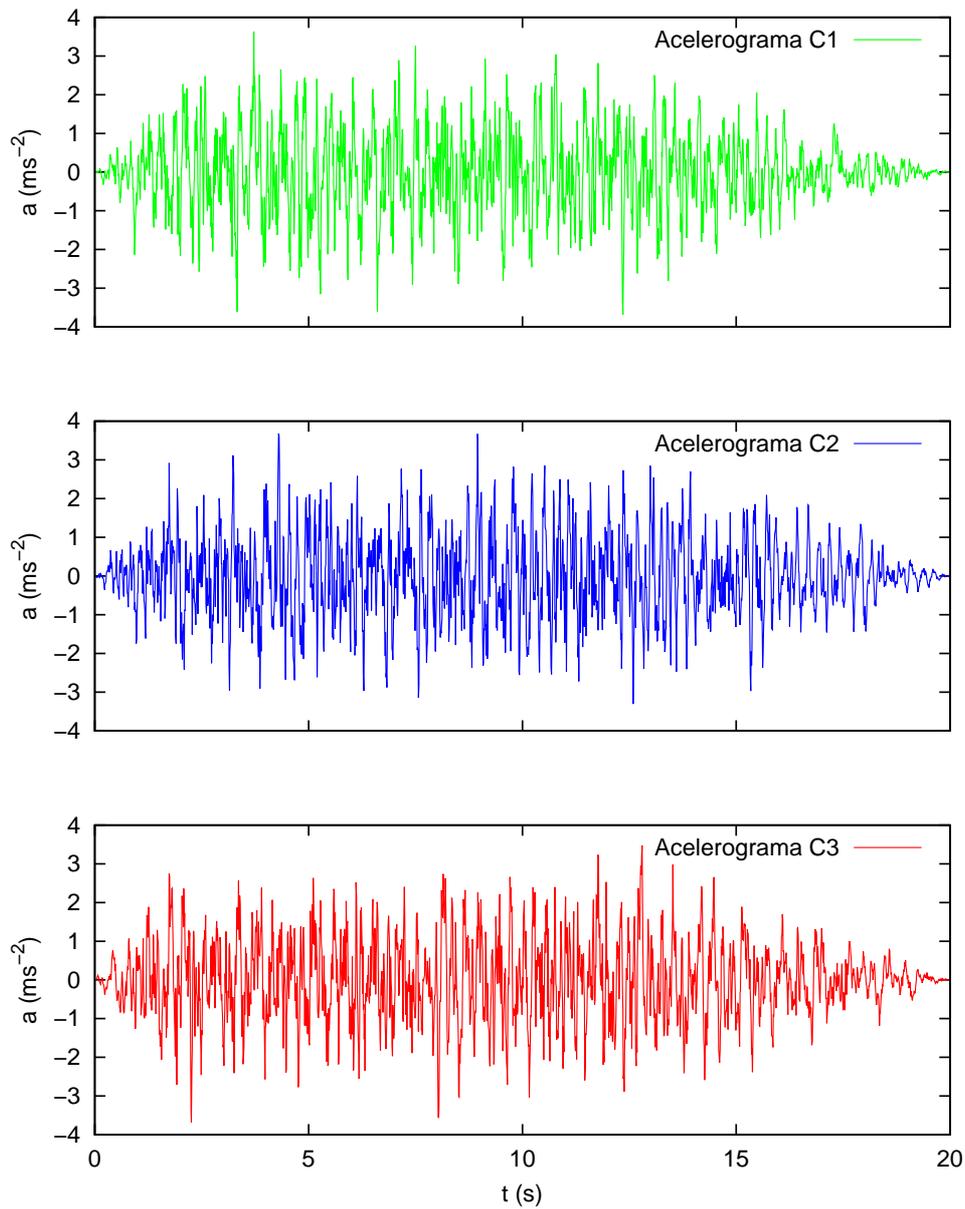


Figura 3.4: Acelerogramas artificiales para suelo Tipo C

respuesta elástica. Los terremotos artificiales de Tipo 1 (figura 3.3) tienen una aceleración máxima de $a_{max} = 2.45 \text{ m/s}^2 = 0.25 g$, mientras que los de Tipo 2 (figura 3.4) tienen una aceleración máxima de $a_{max} = 3.67 \text{ m/s}^2 = 0.375 g$.

3.3.1 Campo incidente

Considerando el terreno como un semiespacio con propiedades mecánicas homogéneas, definimos el campo incidente como un tren de ondas volumétricas de tipo S de incidencia vertical que se propaga por el plano perpendicular a la superficie del mismo (plano x_2x_3). Concretamente estas ondas están polarizadas horizontalmente, lo que conocemos por ondas SH, y originan perturbaciones en el terreno en forma de desplazamientos en la dirección x_1 .

3.4 Validación del código

Esta sección tiene como objetivo validar el modelo presentado en la sección 2.1 para el análisis de cimentaciones profundas, y su implementación en un código Fortran [21], para el estudio de los esfuerzos internos en los pilotes. Para ello se lleva a cabo una serie de comparaciones con otros métodos y autores que certifiquen la validez del mismo. En concreto, el proceso de validación del BEM-FEM se realiza en base al estudio de cuatro casos con parámetros diferentes para una misma configuración de cimentación enterrada, comparando los resultados obtenidos para nuestro código con los resultados obtenidos para los mismos casos a través del modelo Winkler, explicado en la sección 2.2, y con aquellos presentados por Dezi et al. [3].

Estos casos corresponden a una cimentación enterrada compuesta por un pilote simple vertical con el giro restringido en la cabeza. La variación en las características del suelo y del pilote da lugar a los distintos casos. Los parámetros que varían para cada uno de ellos son los que se exponen en la tabla 3.2,

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
d (m)	0.6	0.6	1.2	1.2
ρ_s (kg/m ³)	2000	1500	2000	1500
c_s (m/s)	400	100	400	100

Tabla 3.2: Variación de parámetros en los casos

donde d es el diámetro del pilote, ρ_s es la densidad del pilote y c_s es la velocidad de propagación de la onda en el suelo.

Además, existen datos comunes a los cuatro problemas, y que son necesarios para modelarlos correctamente. Estos son los que se presentan en la tabla 3.3,

en la que E_p representa el módulo de Young del pilote, h la longitud del pilote, ν_p y ν_s son los módulos de Poisson de pilote y suelo respectivamente, ρ_p se define como la densidad del pilote y ξ es el coeficiente de amortiguamiento del suelo.

Con las excitaciones y los distintos casos completamente definidos, ya es posible realizar las comparaciones de los resultados obtenidos mediante el BEM-FEM con los otros dos grupos de resultados.

E_p (N/m ²)	$3 \cdot 10^{10}$
h (m)	24
ν_p	0.25
ν_s	0.4
ρ_p (kg/m ³)	2500
ξ	5 %

Tabla 3.3: Parámetros comunes a todos los casos

3.4.1 Modelo Winkler

Se ha estudiado la comparación con el modelo Winkler en base a dos tipos de terremotos sintéticos, A y C. Tal y como se vio en la sección 2.3, las letras A y C hacen referencia al tipo de suelo por el que se propaga la excitación. Así mismo, en [11] se establece que al ser terremotos generados artificialmente se ha de disponer de un conjunto de 3 sismos para cada tipo.

Por todo ello, en las figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 se representan tres envolventes de momentos por cada tipo de terremoto.

Como se observa, se verifica la validez de los datos simulados mediante el modelo BEM-FEM, dado el alto grado de coincidencia existente en las citadas figuras.

3 Resultados

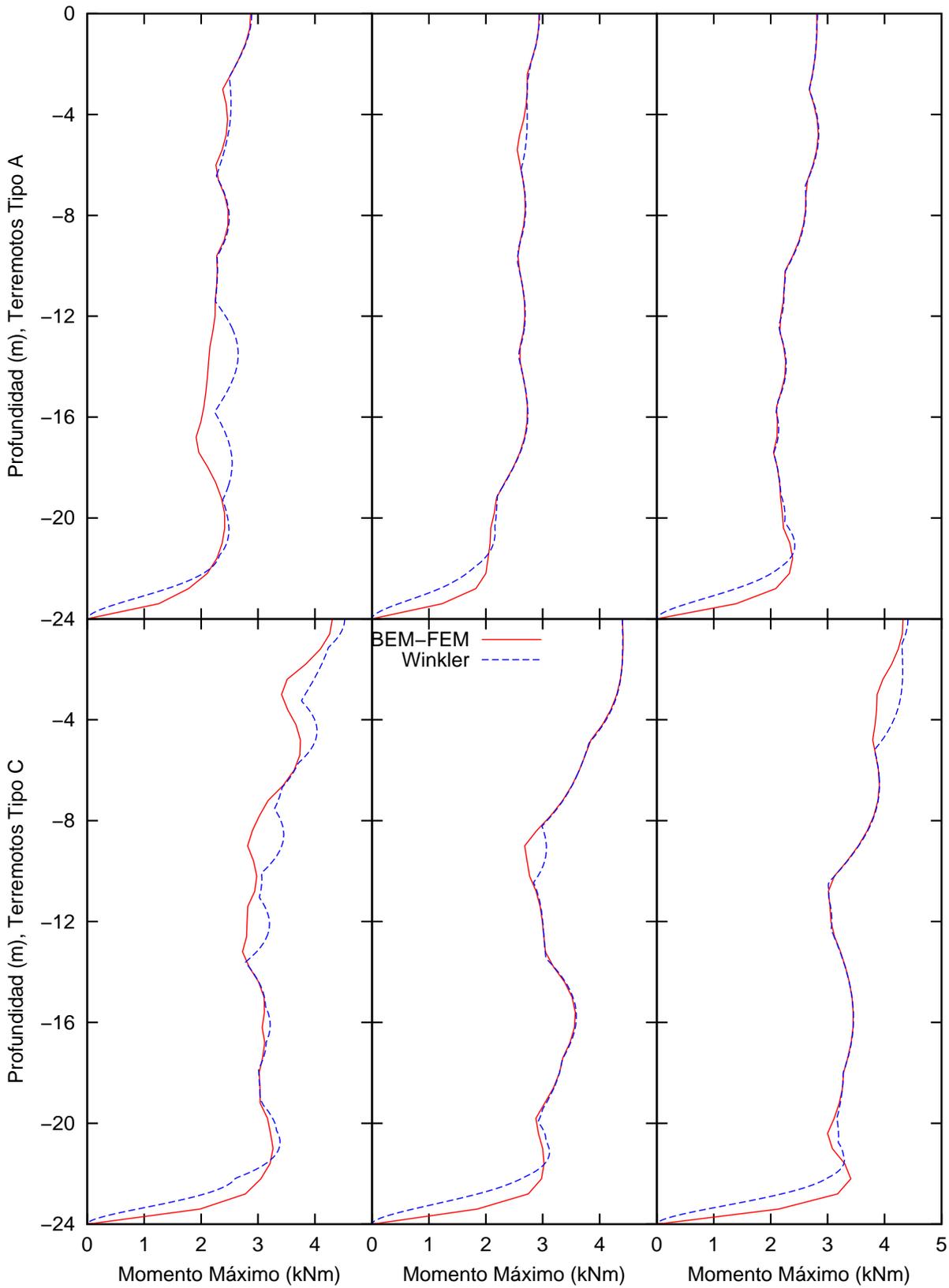


Figura 3.5: Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 1

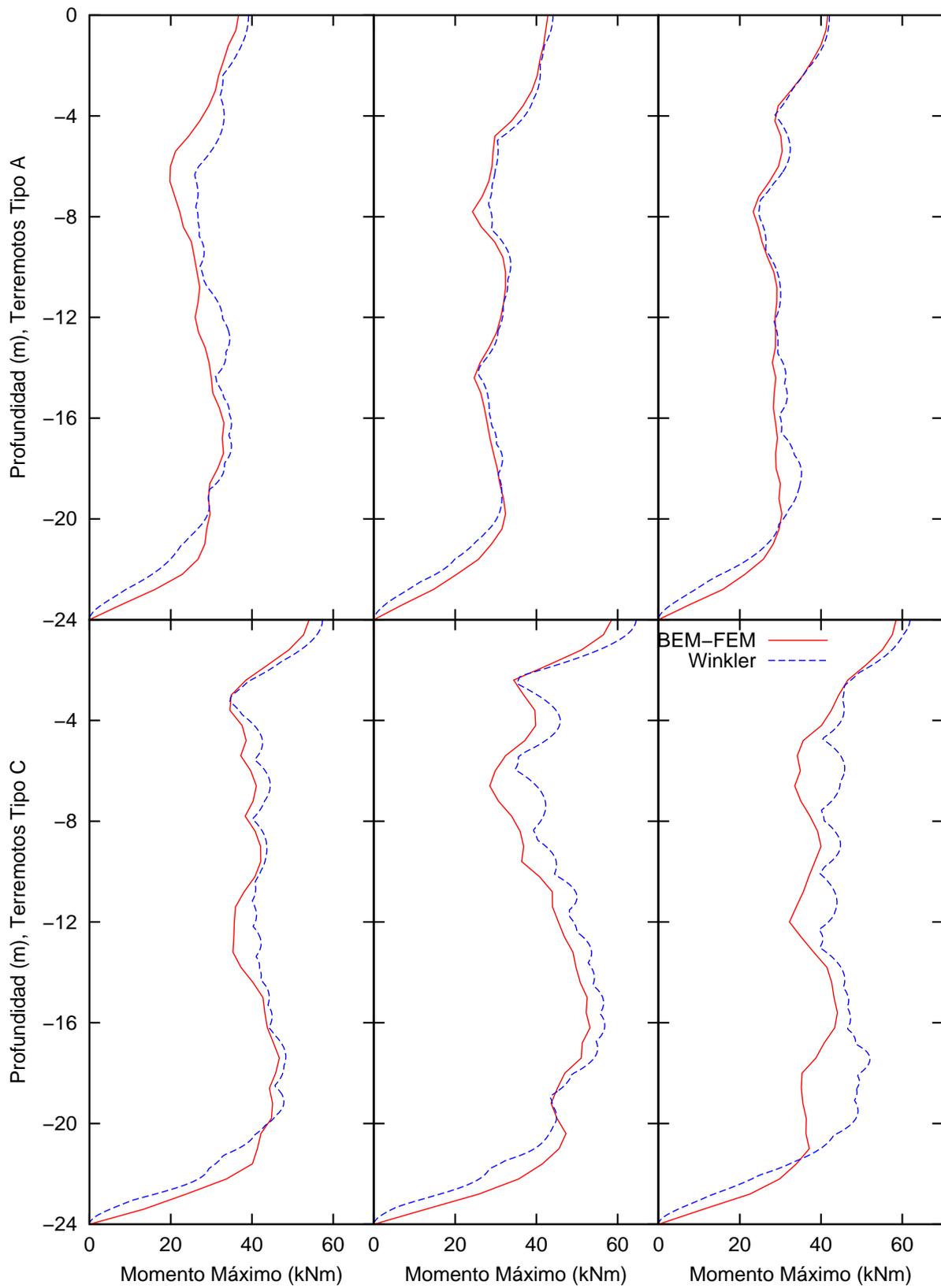


Figura 3.6: Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 2

3 Resultados

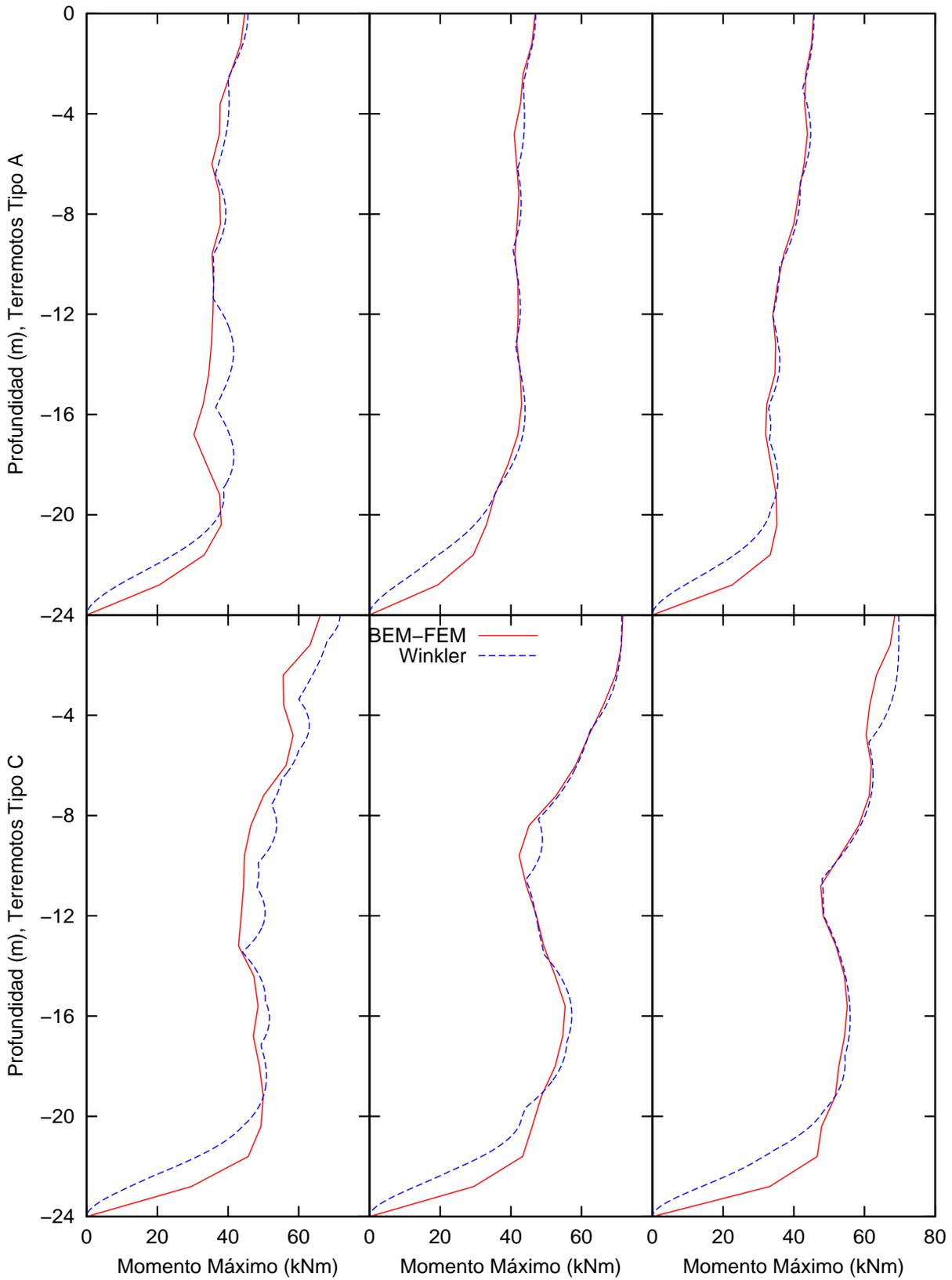


Figura 3.7: Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 3

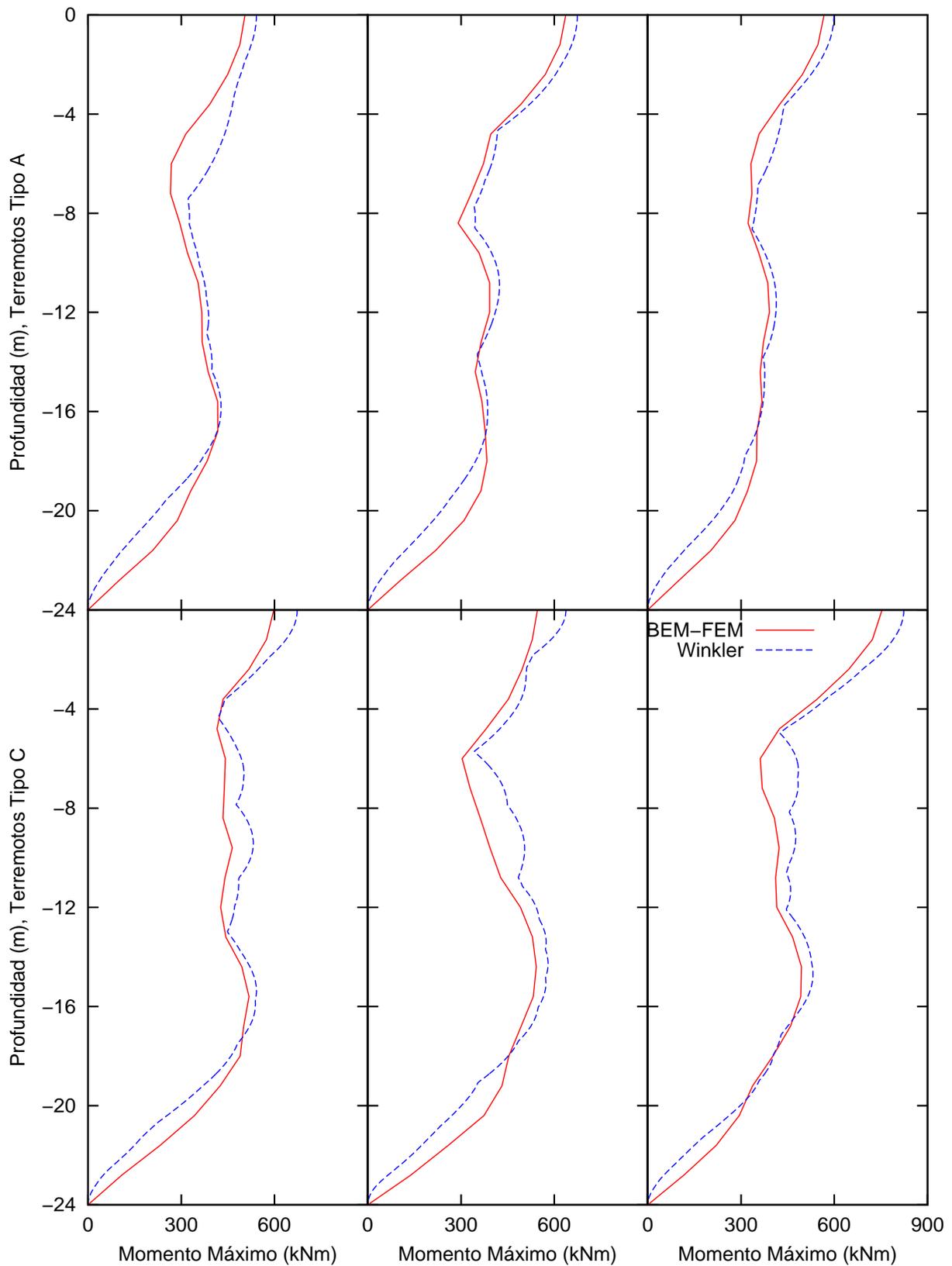


Figura 3.8: Comparación entre envolventes de momento obtenidas mediante modelos BEM-FEM y Winkler. Caso 4

3.4.2 Dezi et al. [3]

La última de las validaciones del modelo BEM-FEM se hará mediante comparando los resultados extraídos del BEM-FEM con las envolventes de momentos expuestas por Dezi et al. en [3].

La figura 3.9 presenta la comparación entre los resultados de ambos modelos para los casos 2 y 4. Tal y como se observa, al igual que en la comparativa con el modelo anterior, el grado de semejanza entre las curvas es alto, por lo que se muestra la validez del BEM-FEM.

Es de necesidad mencionar que, a diferencia de lo ocurrido con los ejemplos expuestos en la figura 3.9, no ha sido posible representar los ejemplos 1 y 3 de la manera en la que lo hace Dezi et al. Creemos que es debido a que no queda claro cómo se prescribe la excitación sísmica. Es decir, no tenemos conocimiento de si la excitación está definida en un "outcropping rock" o en una base rígida y, en ese caso, a qué profundidad [22].

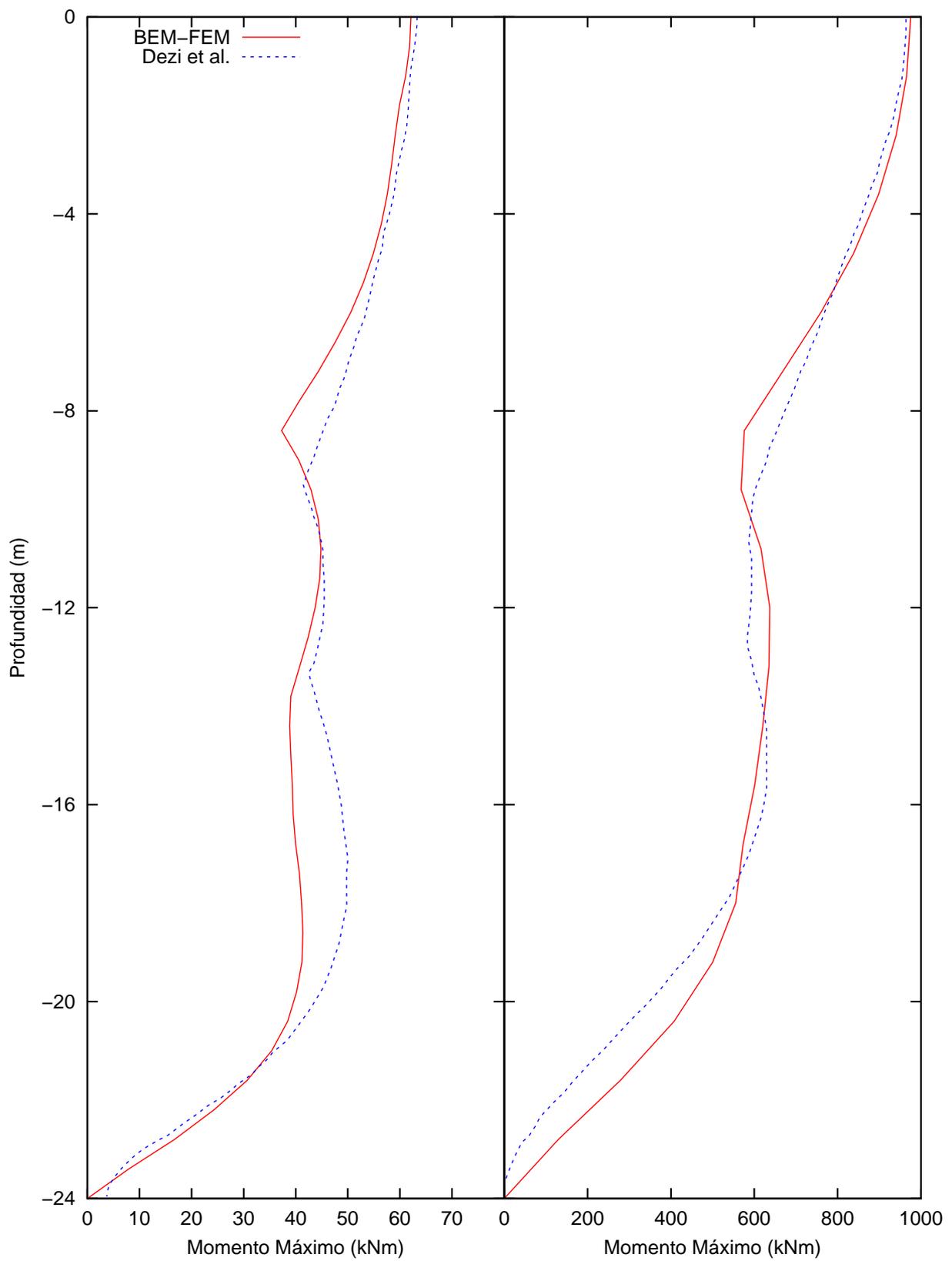


Figura 3.9: Casos 2 y 4. Validación BEM-FEM mediante resultados Dezi et al. [3]

3.5 Envoltentes de esfuerzos

En esta sección se exponen los resultados obtenidos en forma de envoltentes de esfuerzos para las dos configuraciones de cimentación enterrada estudiadas. Para cada una de estas configuraciones se representan las envoltentes de esfuerzos correspondientes a dos ejemplos dimensionales, definidos en el apartado 3.2.2, y que se identifican a partir de ahora como $d = 0.6\text{ m}$ y $d = 1.2\text{ m}$, ya que el diámetro de los pilotes es la principal diferencia entre ellos.

Estas envoltentes se presentan como valores de los esfuerzos internos de los pilotes en respuesta a tres excitaciones definidas como terremotos C1, C2 y C3. Tal y como se explica en la sección 2.3, al tratarse de sismos artificiales la norma establece que se debe usar un paquete de tres terremotos para poder analizar los resultados correctamente.

Por una parte, las figuras 3.10 a 3.15 representan las envoltentes de esfuerzos del pilote simple para los dos ejemplos dimensionales. En cada una de estas figuras se expone una comparativa entre los valores de los esfuerzos internos del pilote (momento flector, esfuerzo cortante y axiles de compresión y tracción) para las distintas inclinaciones del mismo y los tres tipos de suelo, para una excitación determinada. En ellas se ve como, para los distintos tipos de suelo y en la mayor parte del pilote, los valores de momentos flectores y esfuerzos cortantes disminuyen a medida que aumenta la inclinación del pilote. Por el contrario, los valores de los esfuerzos axiles, tanto de tracción como de compresión, aumentan con la inclinación, siendo nulos cuando el pilote es vertical, dadas las características del campo incidente (apartado 3.3.1). Cabe mencionar que, a excepción del tipo de suelo más blando, para el resto de tipos de suelo existe un pico de los valores del esfuerzo cortante en profundidades cercanas a la cabeza del pilote, siendo este más acentuado cuanto más inclinado está el pilote. Atendiendo a la variación del tipo de suelo, se ve como a medida que situamos la cimentación en suelos más blandos (aumenta E_p/E_s) los valores de los momentos flectores y los esfuerzos cortantes aumentan en escala. Sin embargo, esto no ocurre para los esfuerzos axiles, que mantienen su escala con el cambio de suelo.

Por otra parte, las figuras 3.16 a 3.21 son análogas a las expuestas anteriormente para el pilote simple, pero en este caso representando la comparativa entre los esfuerzos internos para las distintas inclinaciones y tipos de suelo en la configuración de encepado de 2×2 pilotes. Cabe destacar que en todas las figuras en las que se representan resultados para esta configuración estos corresponden a los de un único pilote del encepado. En estas, podemos observar como, al igual que para el pilote simple, el aumento de la inclinación de los pilotes disminuye los valores de esfuerzos cortantes y flectores para todos los tipos de suelo, sobre todo a profundidades no cercanas a la cabeza de la cimentación. Además, también se observa como la inclinación de los pilotes aumenta los valores de los esfuerzos axiles de tracción y compresión. Es necesario apuntar que vuelve a aparecer un pico de esfuerzos cortantes en profundidades cercanas a la cabeza y además, al igual que en el caso del pilote simple, este se acentúa con la inclinación de los pilotes, sin embargo, para esta configuración se aprecia en todos los tipos de suelo incluido el más blando. También se aprecia como los momentos en la cabeza de la cimentación son distintos a los que aparecían para el pilote simple con giro impedido en la cabeza, no obstante, este tipo de detalles se observa mejor en el siguiente grupo de figuras. Centrándonos en la variación del tipo de suelo, se puede observar como el paso de un suelo más rígido a otro más blando aumenta la escala de momentos flectores y esfuerzos cortantes, mientras que mantiene la de esfuerzos axiles. En estos últimos, se aprecia como, con el cambio de suelo, van apareciendo axiles distintos de cero para pilotes verticales, fenómeno que no se da para el pilote simple. Este fenómeno se explica atendiendo a la figura 3.47, en la que se observa como para el pilote vertical y frecuencias medias existen pequeños giros del encepado, lo que provoca la aparición de esfuerzos axiles en la cabeza de los pilotes. Además, el giro del encepado implica

que aparezcan esfuerzos axiales de tracción o compresión, según la posesión, a lo largo de los pilotes verticales.

Por último, en las figuras 3.22 a 3.45 se presenta, para cada esfuerzo, la comparación entre las envolventes correspondientes al pilote simple y al grupo de 2×2 pilotes para los distintos grados de inclinación de los mismos así como para los diferentes tipos de suelo. Estas figuras ayudan a visualizar de manera más clara las diferencias en los esfuerzos internos de los pilotes según la configuración de la cimentación.

Para los momentos flectores una de las principales diferencias se encuentra en su evolución con el ángulo de inclinación de los pilotes. Aún observando que para profundidades alejadas de la cabeza de la cimentación las curvas son prácticamente idénticas en ambas configuraciones para todos los valores de la inclinación, para las profundidades comprendidas en el primer cuarto de la longitud de los pilotes únicamente coinciden las curvas correspondientes a los pilotes verticales. En la cabeza del grupo de pilotes, los valores de los momentos flectores experimentan incrementos de hasta tres veces el valor obtenido para el pilote vertical, encontrando su máximo para 20° y disminuyendo cuando se aumenta la inclinación a partir de ese valor. Las causas principales de estas diferencias las podemos encontrar en las restricciones cinemáticas impuestas por el encepado rígido unidas a los efectos de interacción cinemática y a la condición de giro impedido del pilote simple.

En relación a los esfuerzos cortantes, los valores de los mismos en la cabeza de los pilotes son distintos si comparamos ambas configuraciones, siendo nulos para el pilote simple y distintos de cero para el encepado de pilotes, ya que en el pilote simple el desplazamiento horizontal en la cabeza no está restringido de ninguna manera. En el grupo de 2×2 , los valores máximos que se alcanzan en la cabeza varían con el tipo de suelo, tomando valores de hasta 12 veces el valor del pilote vertical para $E_p/E_s = 50$, de hasta 8 veces para el suelo correspondiente a $E_p/E_s = 100$ y de hasta 4 veces para un $E_p/E_s = 500$. Es la vinculación de los desplazamientos horizontales impuesta por el encepado rígido la que hace que aumenten estos esfuerzos en la cabeza a medida que se inclinan los pilotes. Además, la comparación entre ambas configuraciones deja en evidencia como, para profundidades bajas distintas de la cabeza de la cimentación, los picos de estos esfuerzos se acentúan notablemente para el grupo de pilotes, siendo este efecto más notorio cuanto mayor es la inclinación de los mismos.

Atendiendo a los esfuerzos axiales de tracción y compresión, como se explica para el grupo de figuras anterior, la principal diferencia entre configuraciones es la existencia de valores pequeños de estos esfuerzos, sobre todo para suelos blandos, en pilotes verticales del grupo de pilotes, valores que no aparecen para el pilote simple. Además existe una pequeña diferencia entre los valores de estos momentos en la cabeza de la cimentación de las dos configuraciones cuya justificación es la misma que la que se ha utilizado para el efecto anterior. Al aumentar el giro del encepado con la inclinación de los pilotes se encuentran valores de estos esfuerzos en la cabeza de la cimentación.

Para finalizar, es necesario dejar constancia de que la principal diferencia que se observa entre los distintos ejemplos dimensionales ($d = 0.6\text{ m}$ y $d = 1.2\text{ m}$) escogidos para representar las envolventes de esfuerzos se encuentra en el aumento de la escala de los esfuerzos al pasar del de menor al de mayor diámetro de los pilotes, por lo tanto las observaciones anteriormente señaladas son totalmente aplicables a ambos ejemplos.

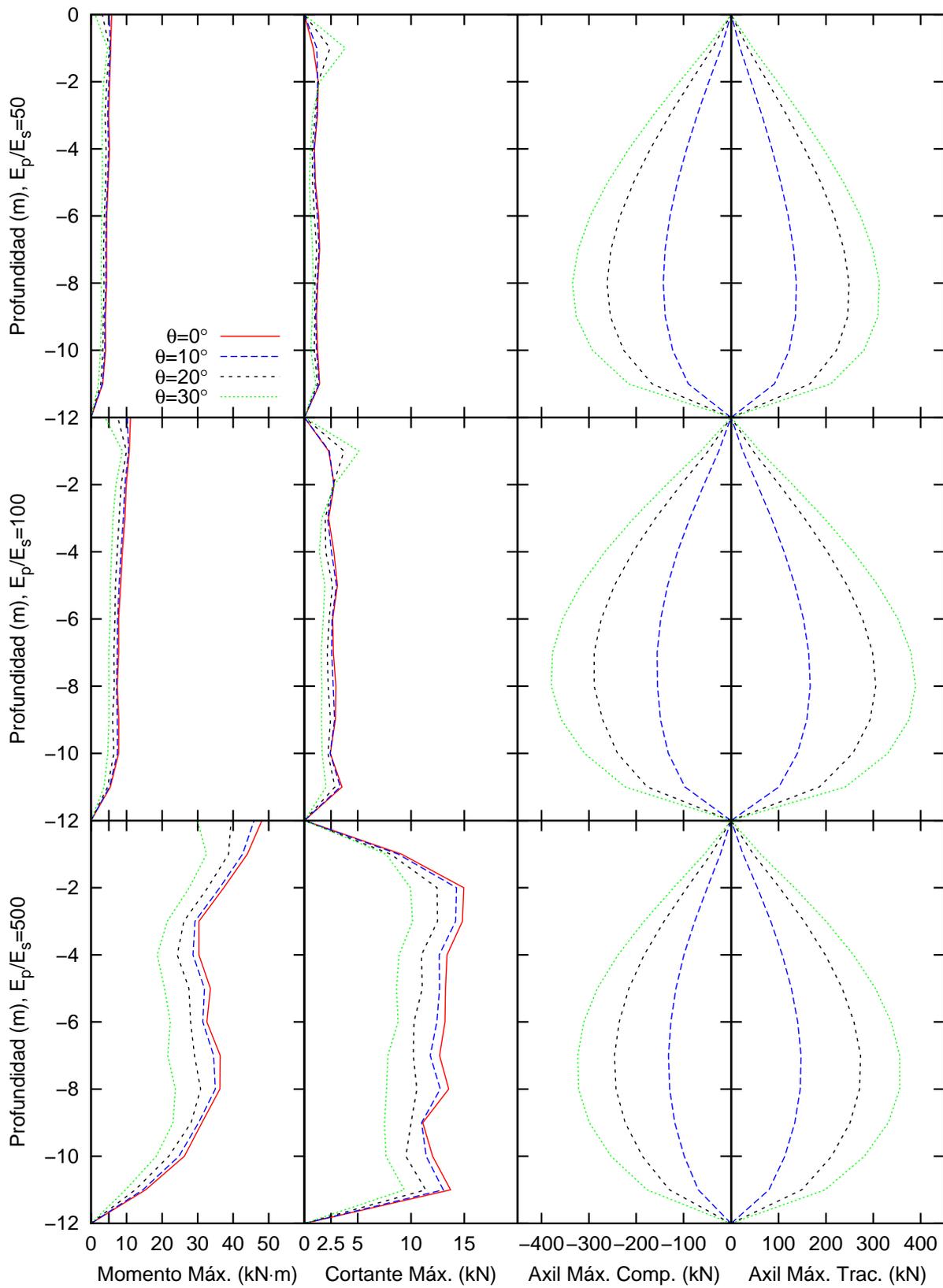


Figura 3.10: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 0.6$ m y terremoto C1

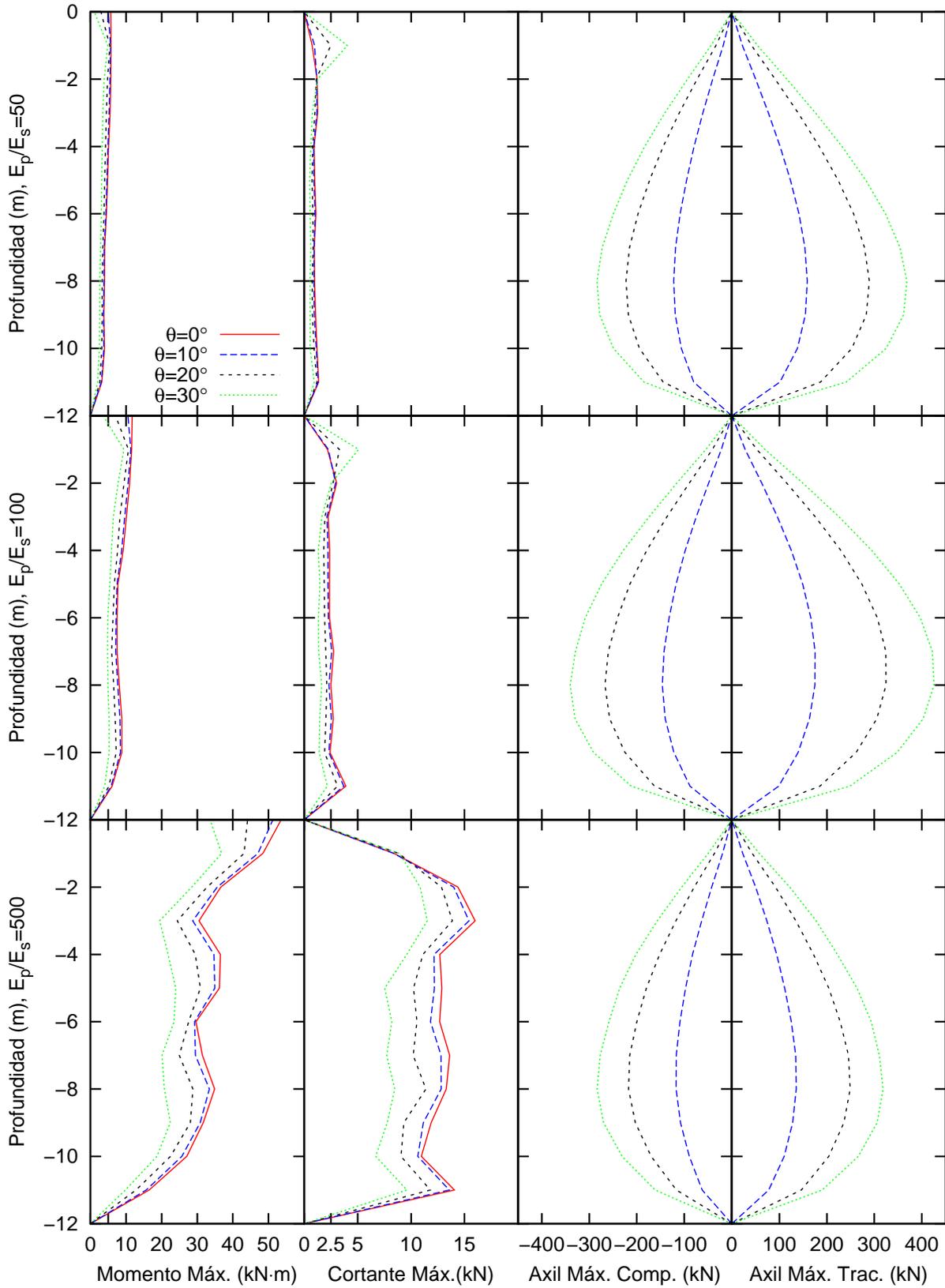


Figura 3.11: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 0.6$ m y terremoto C2

3 Resultados

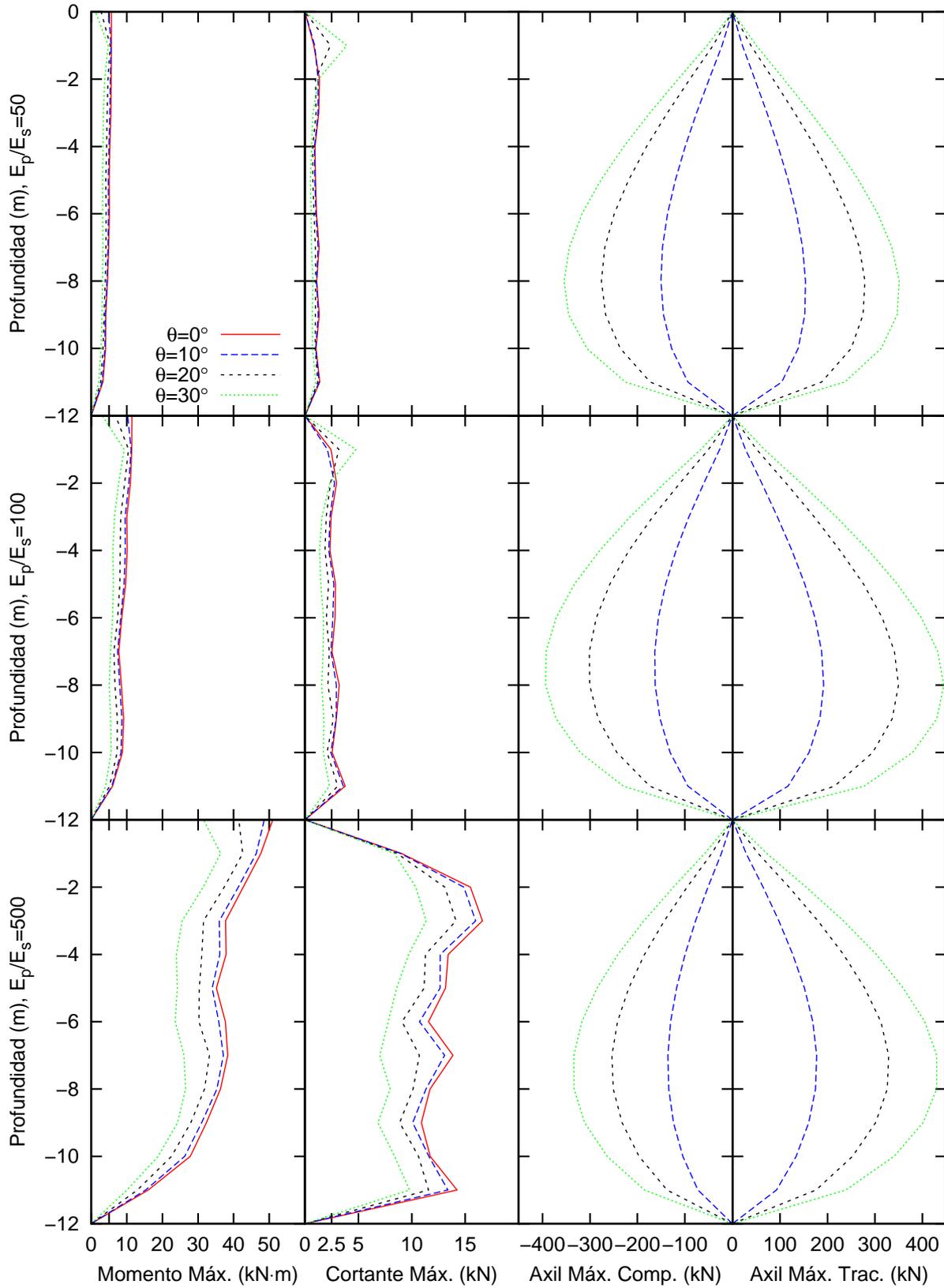


Figura 3.12: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 0.6$ m y terremoto C3

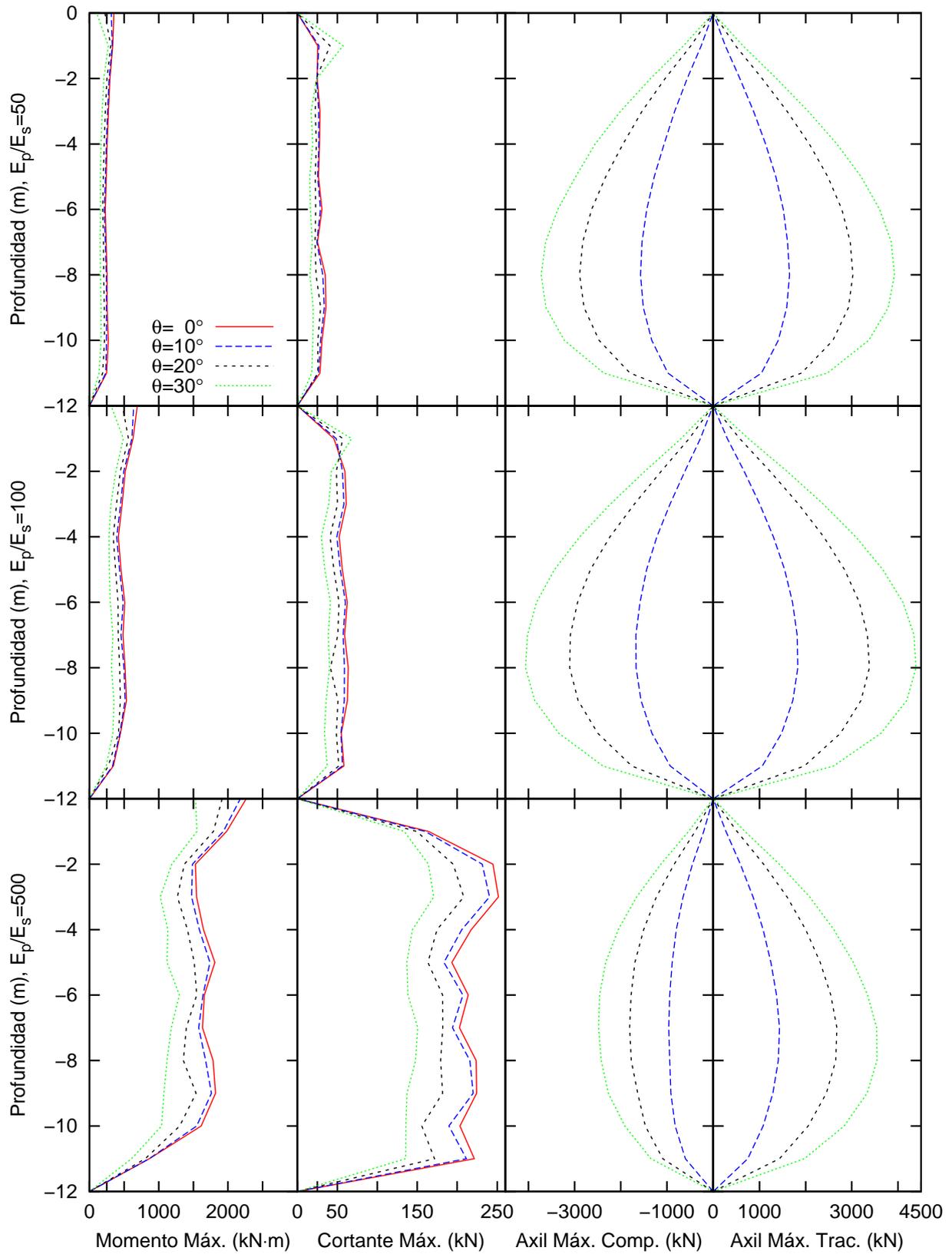


Figura 3.13: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 1.2\text{m}$ y terremoto C1

3 Resultados

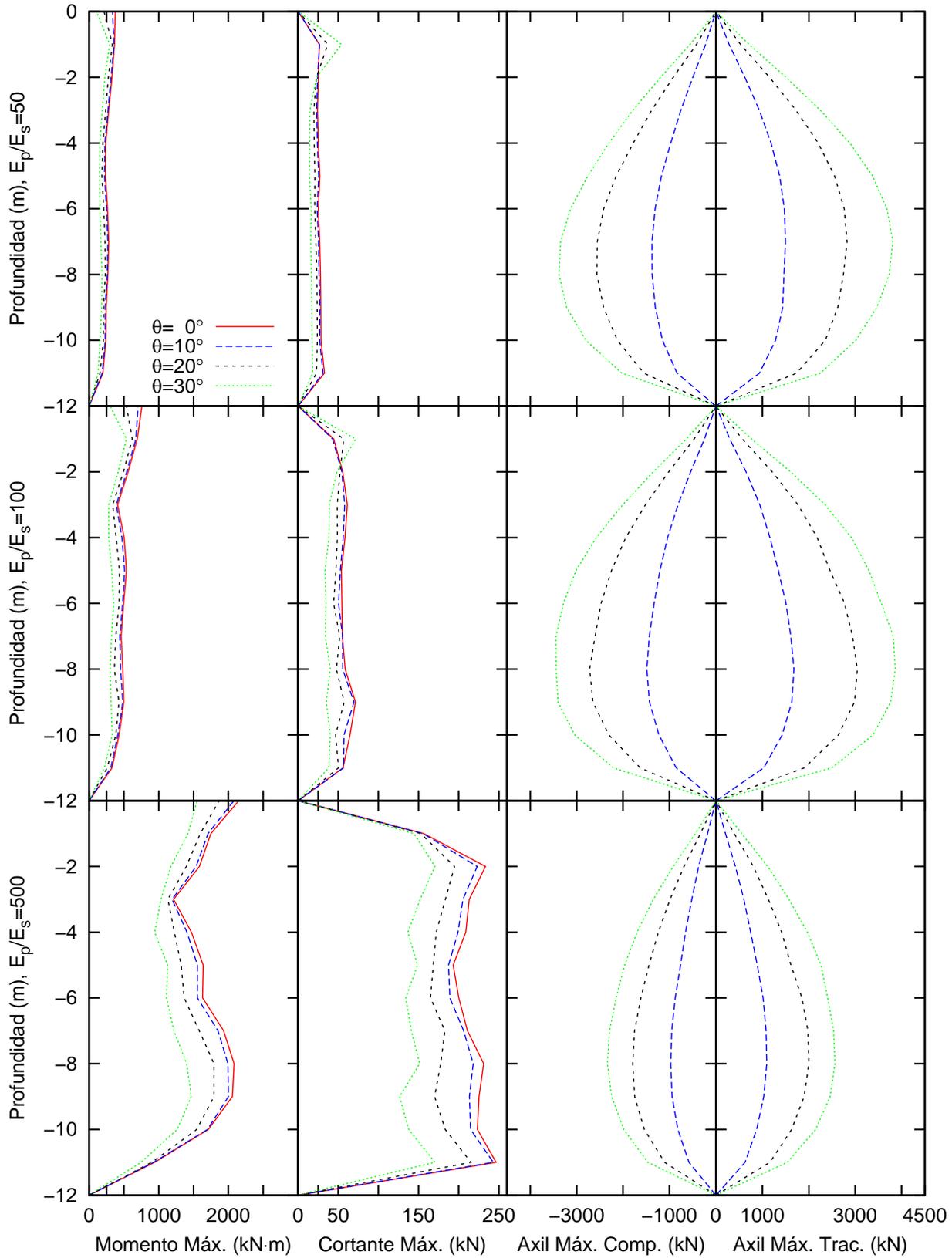


Figura 3.14: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 1.2\text{ m}$ y terremoto C2

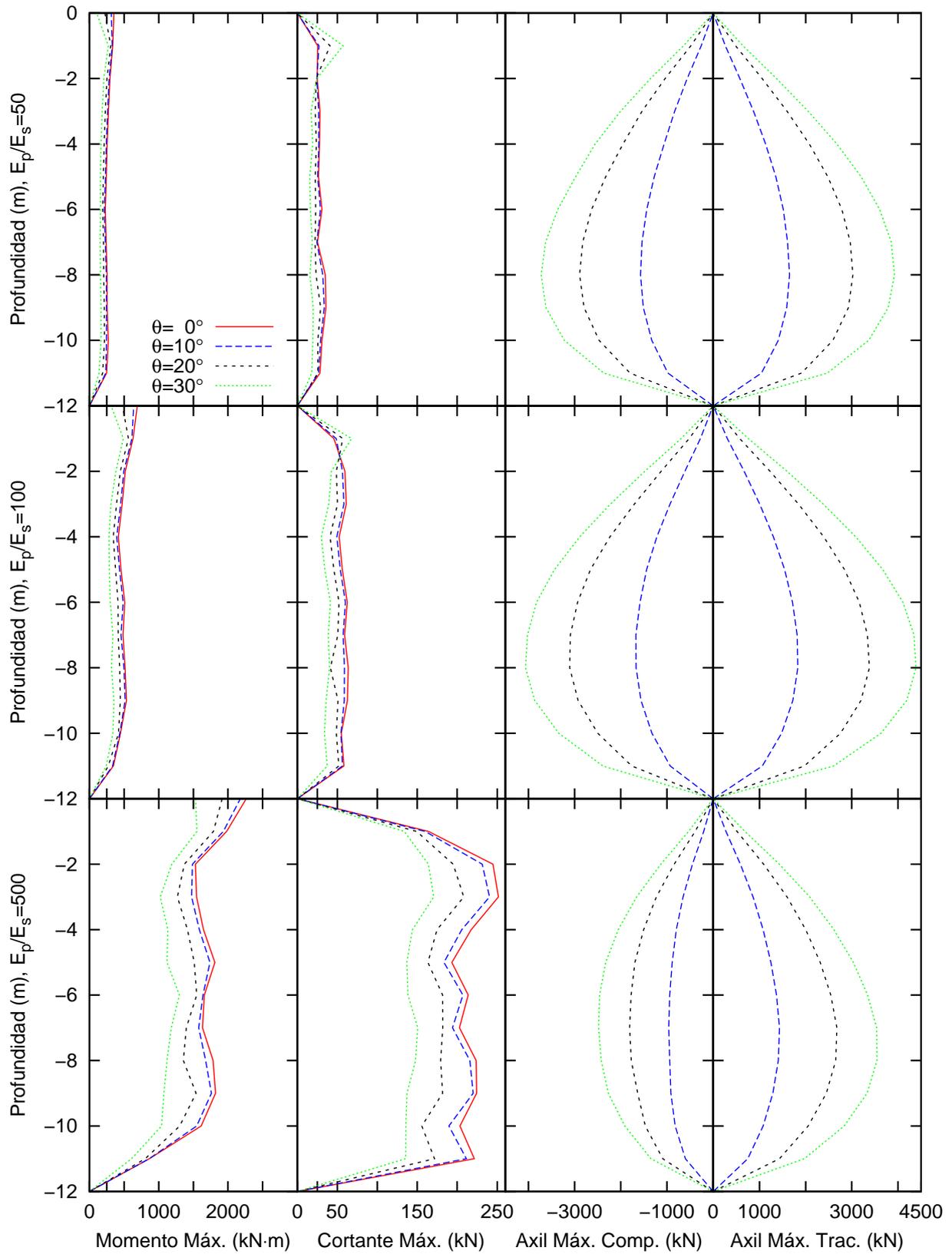


Figura 3.15: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, pilote simple, $d = 1.2\text{m}$ y terremoto C3

3 Resultados

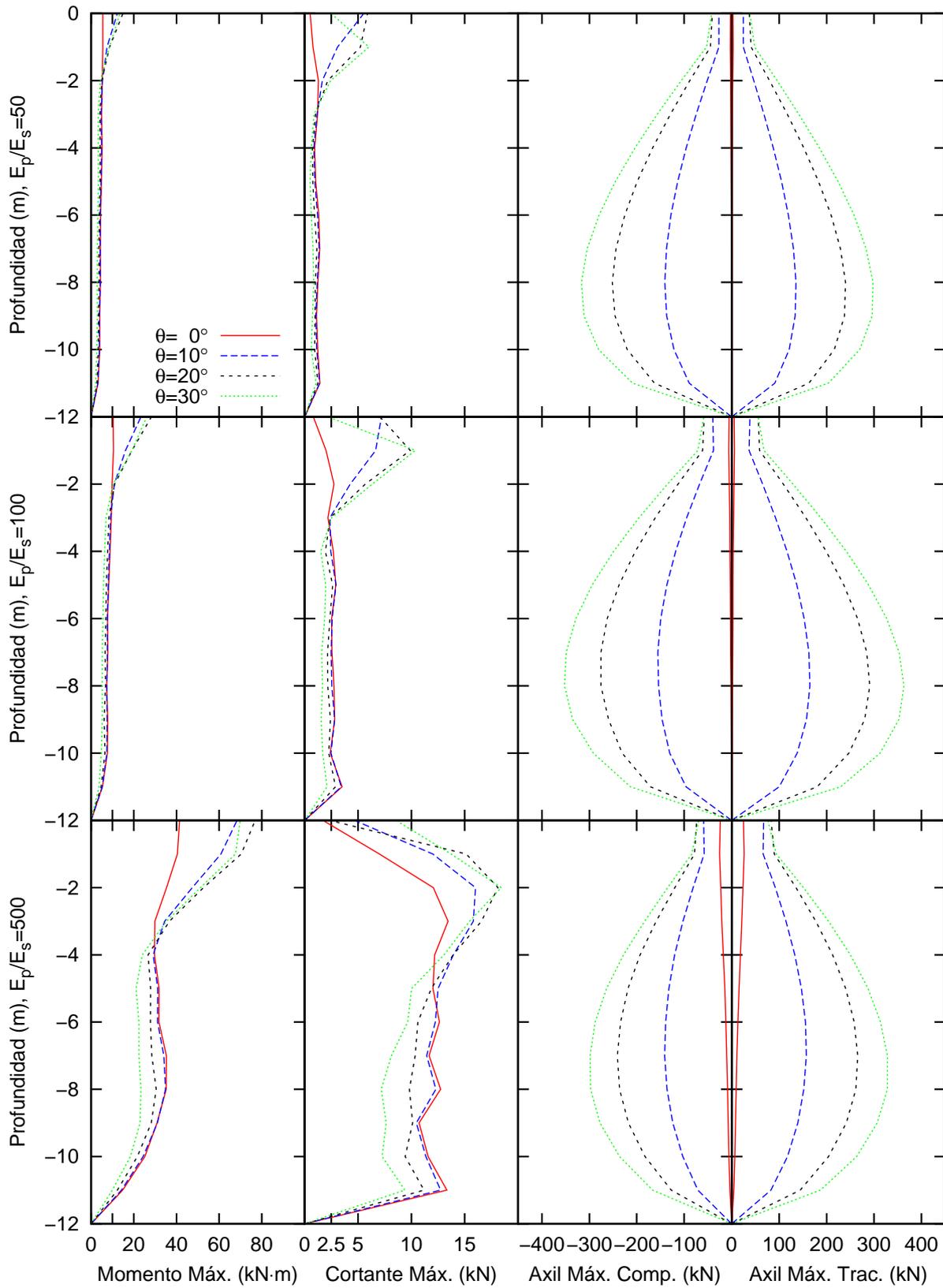


Figura 3.16: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 0.6$ m y terremoto C1

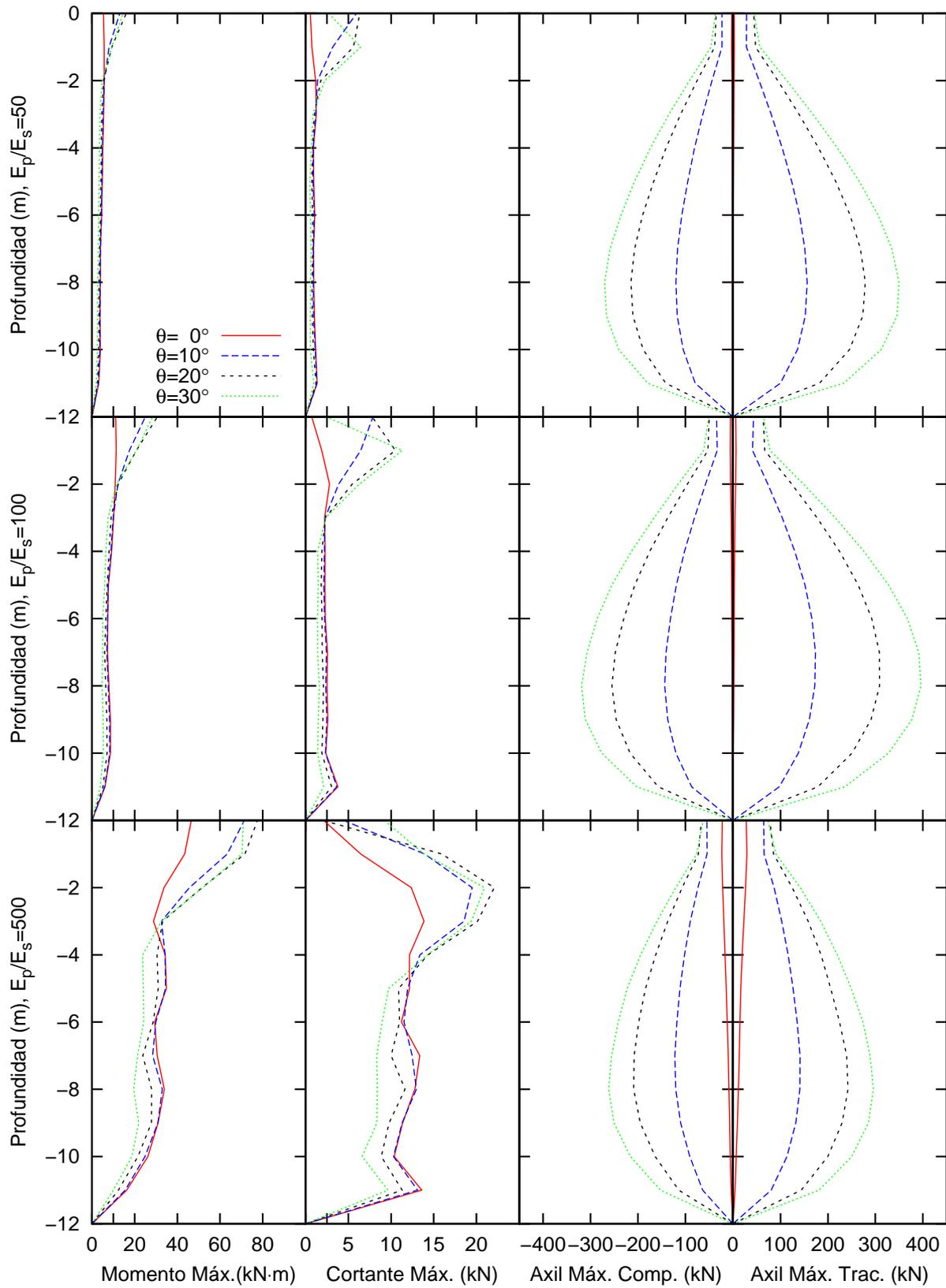


Figura 3.17: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 0.6$ m y terremoto C2

3 Resultados

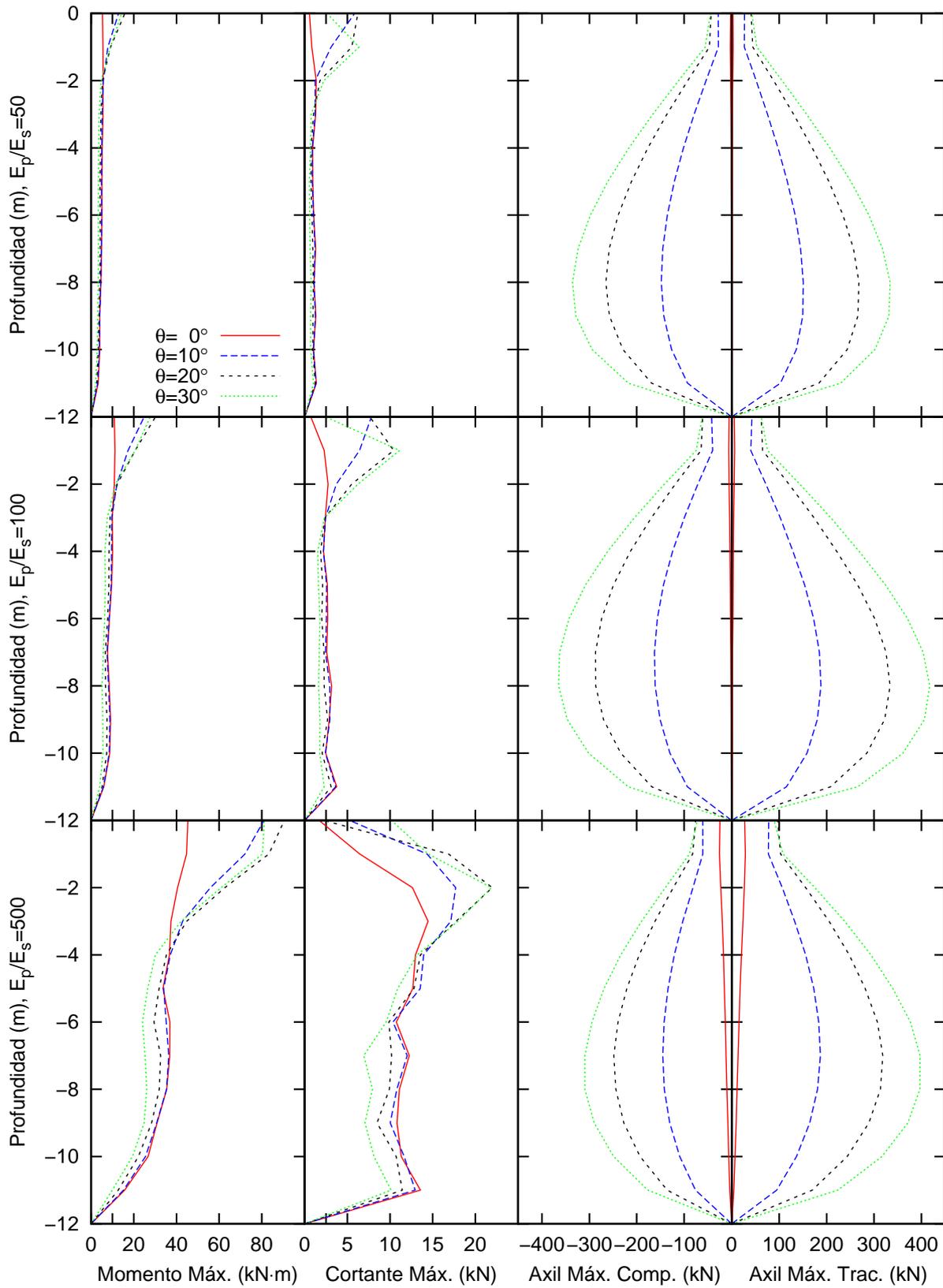


Figura 3.18: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 0.6$ m y terremoto C3

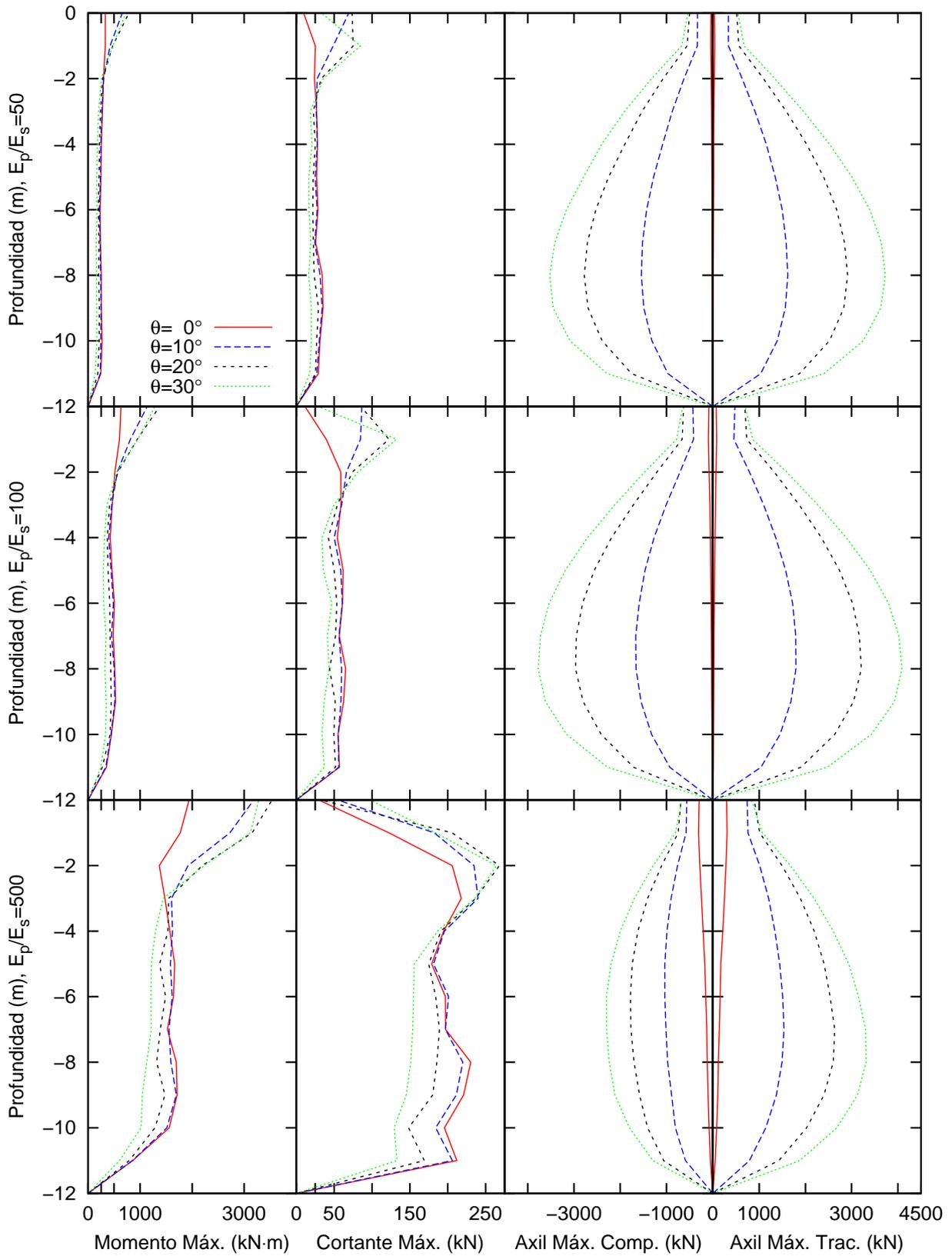


Figura 3.19: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 1.2\text{m}$ y terremoto C1

3 Resultados

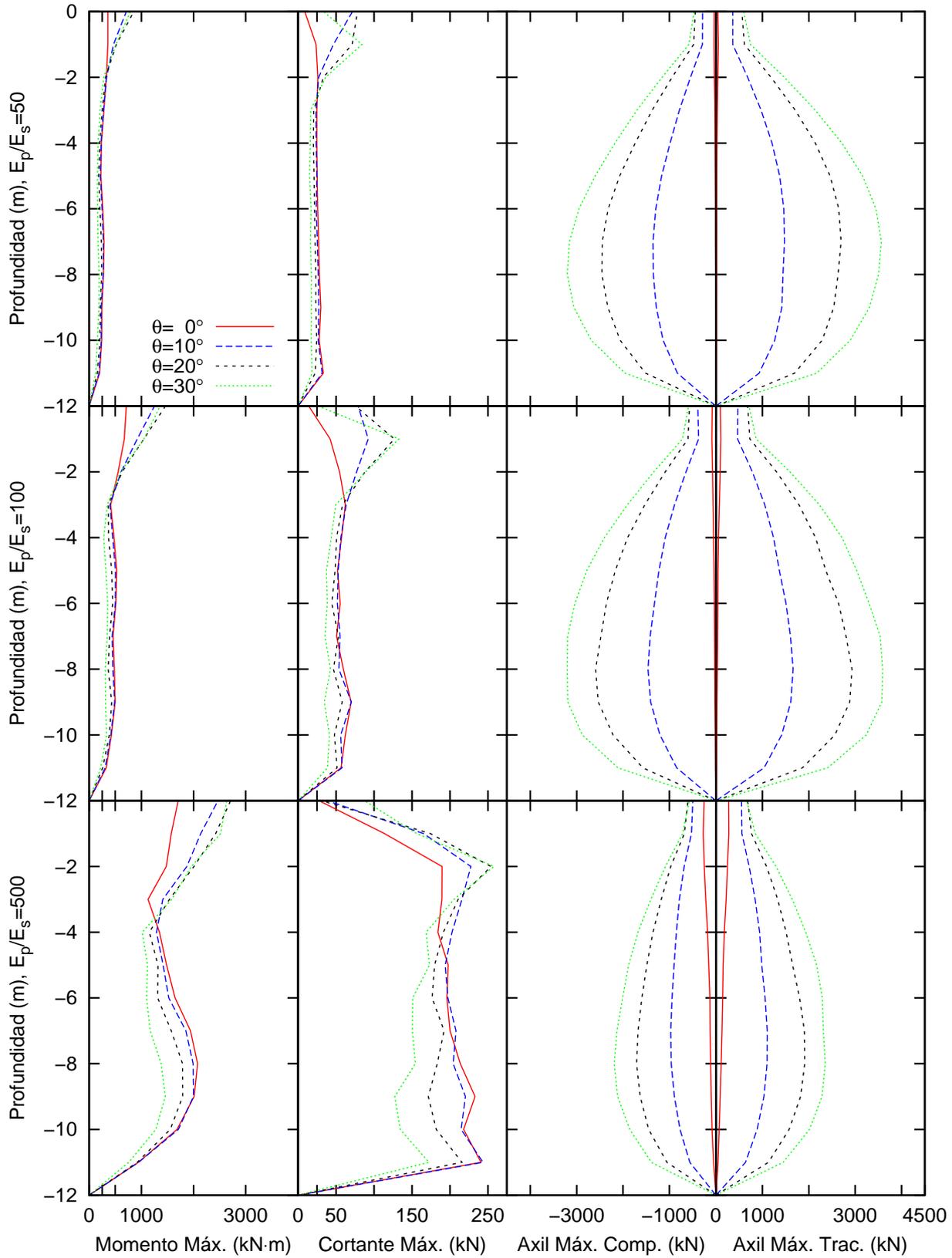


Figura 3.20: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 1.2$ m y terremoto C2

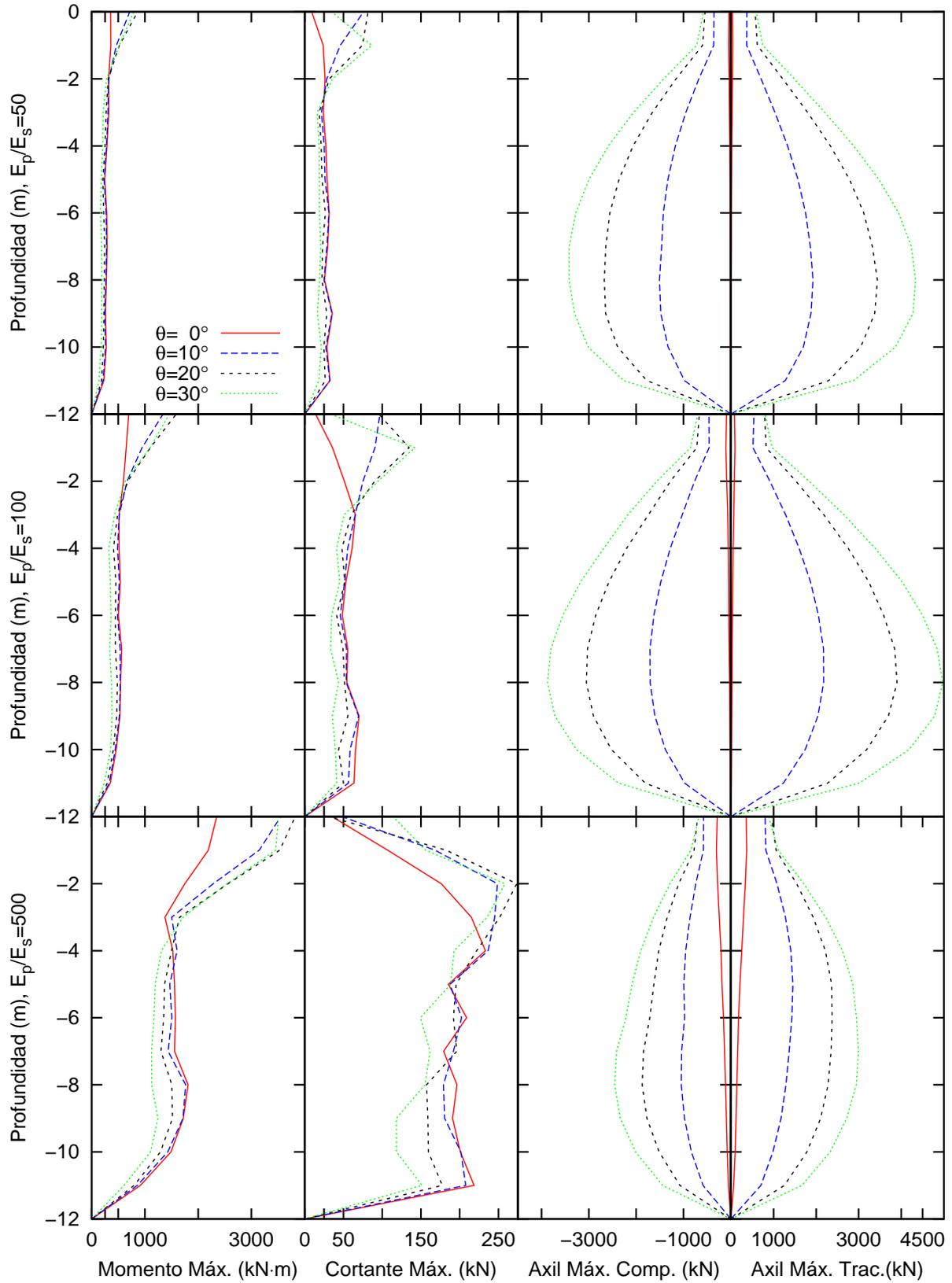


Figura 3.21: Envolventes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles, encepado 2×2 , $d = 1.2\text{m}$ y terremoto C3

3 Resultados

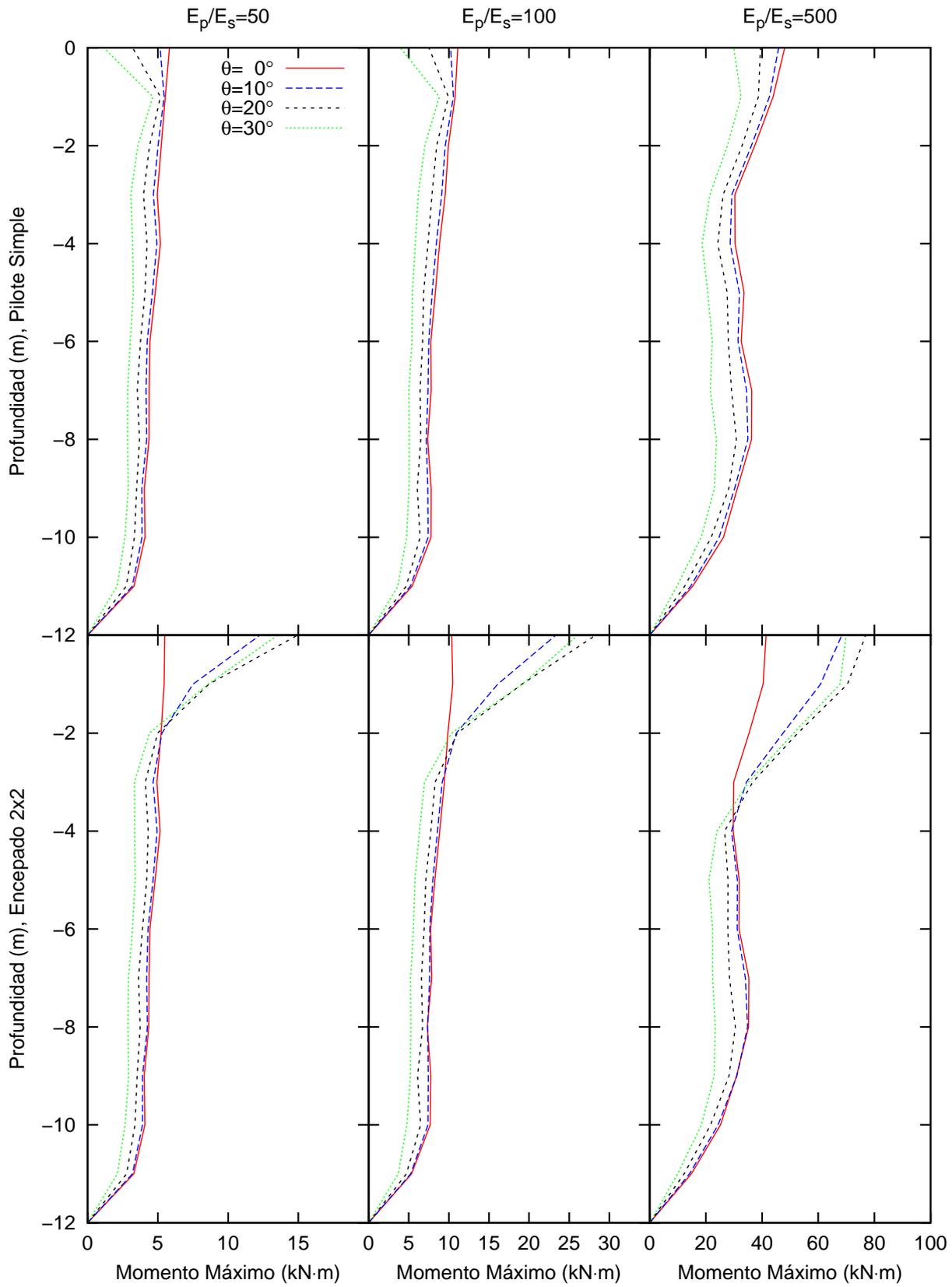


Figura 3.22: Comparación de momentos, $d = 0.6$ m y terremoto C1

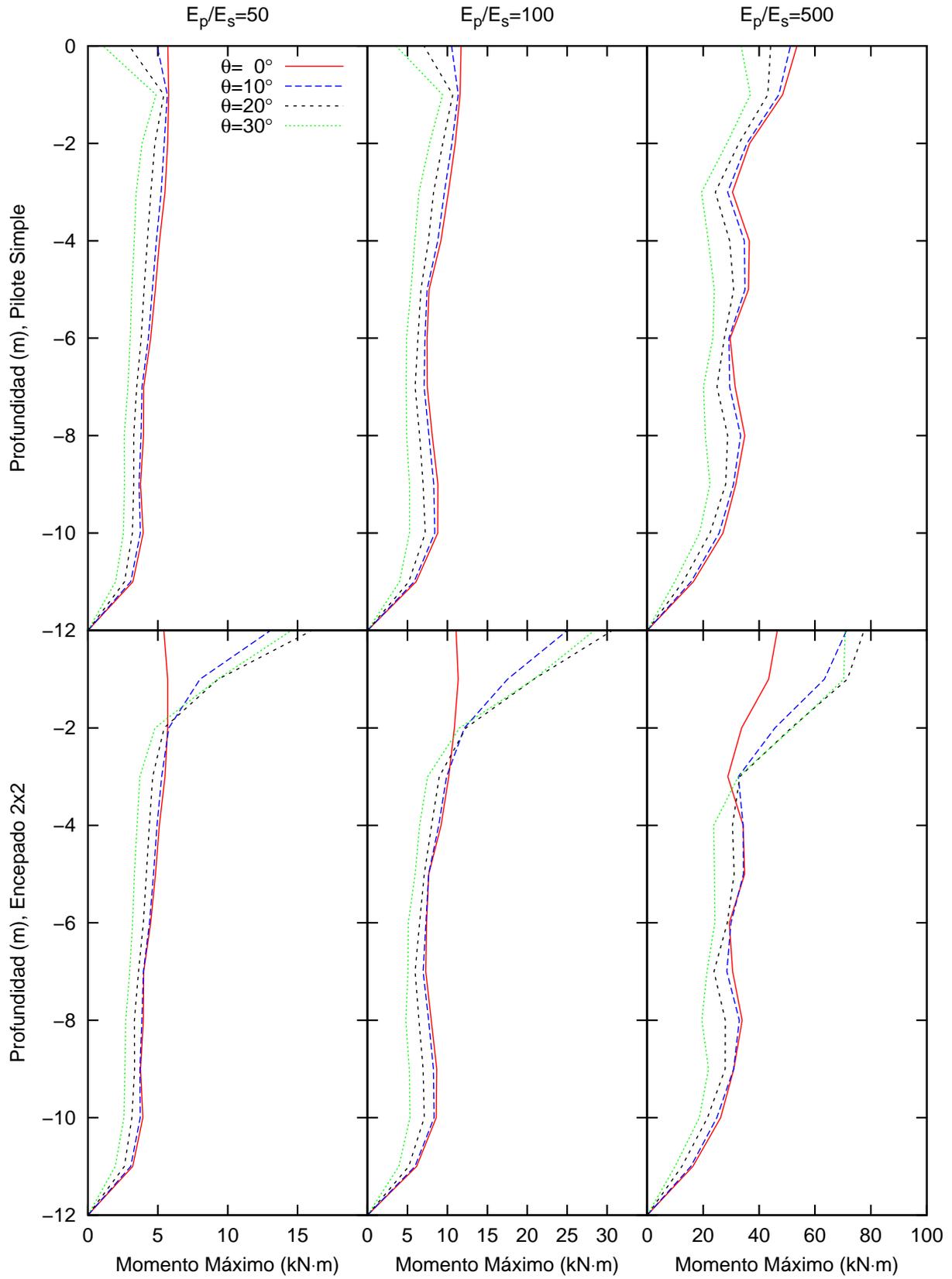


Figura 3.23: Comparación de momentos, $d = 0.6 \text{ m}$ y terremoto C2

3 Resultados

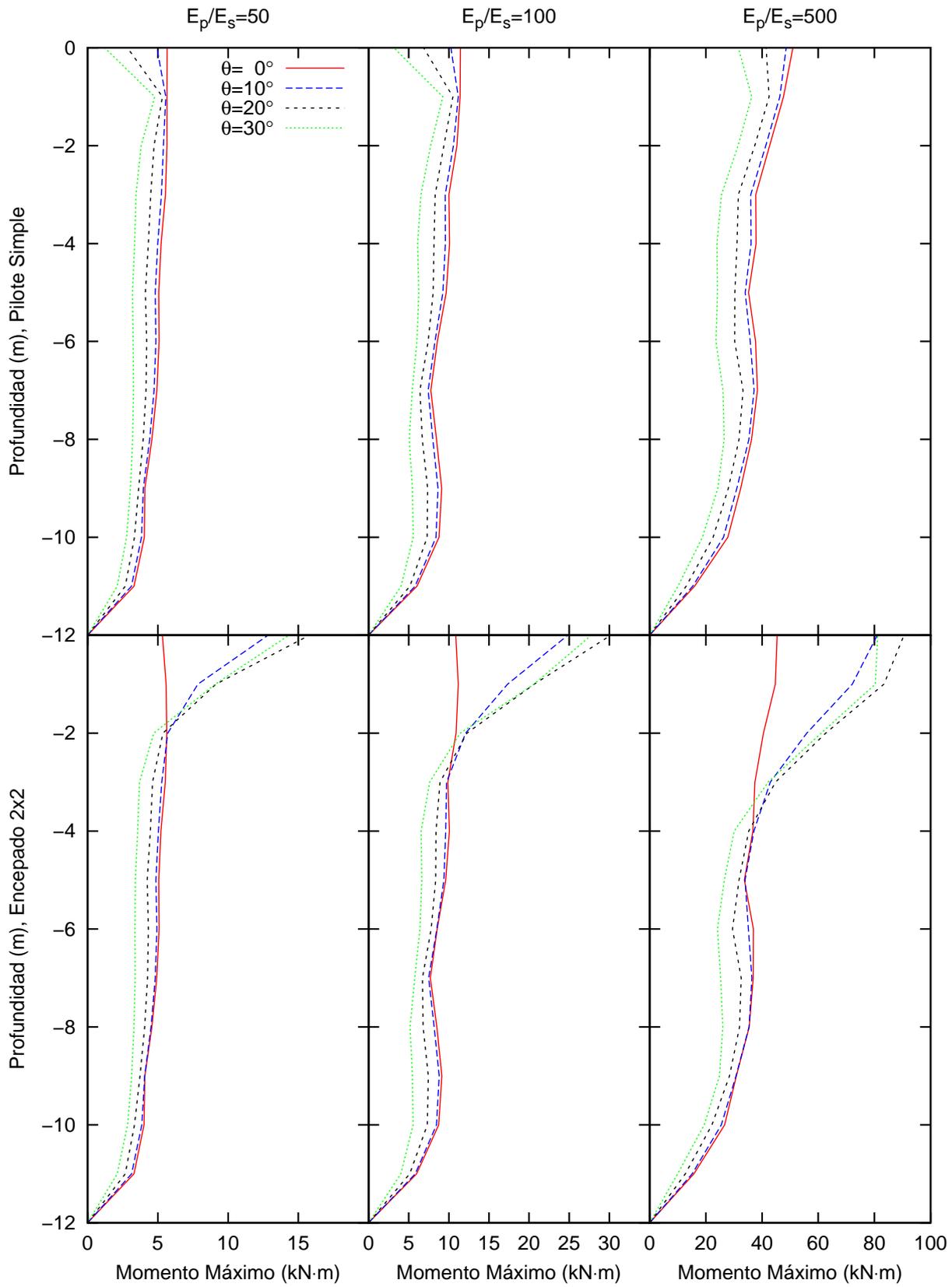


Figura 3.24: Comparación de momentos, $d = 0.6$ m y terremoto C3

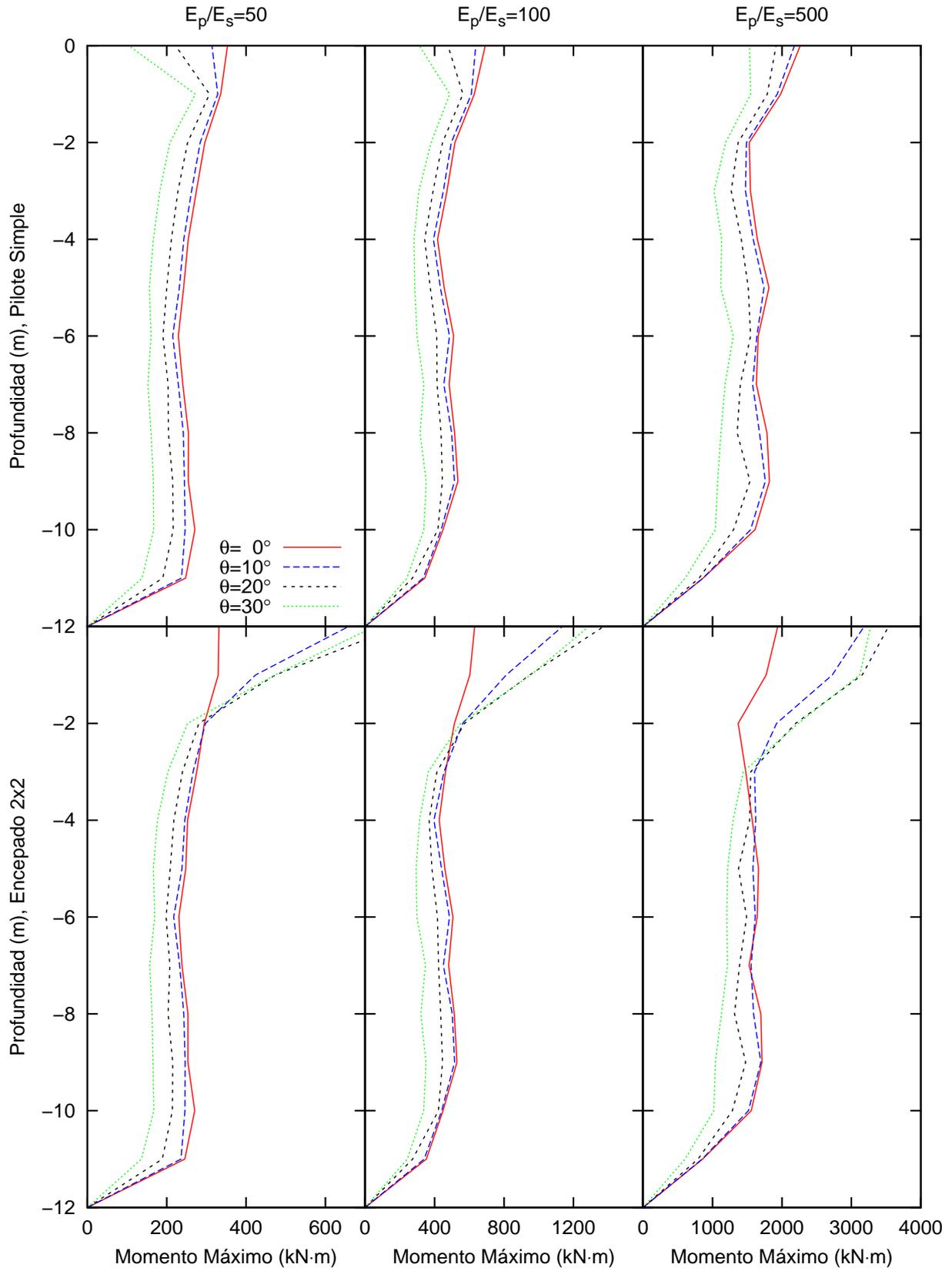


Figura 3.25: Comparación de momentos, $d = 1.2$ m y terremoto C1

3 Resultados

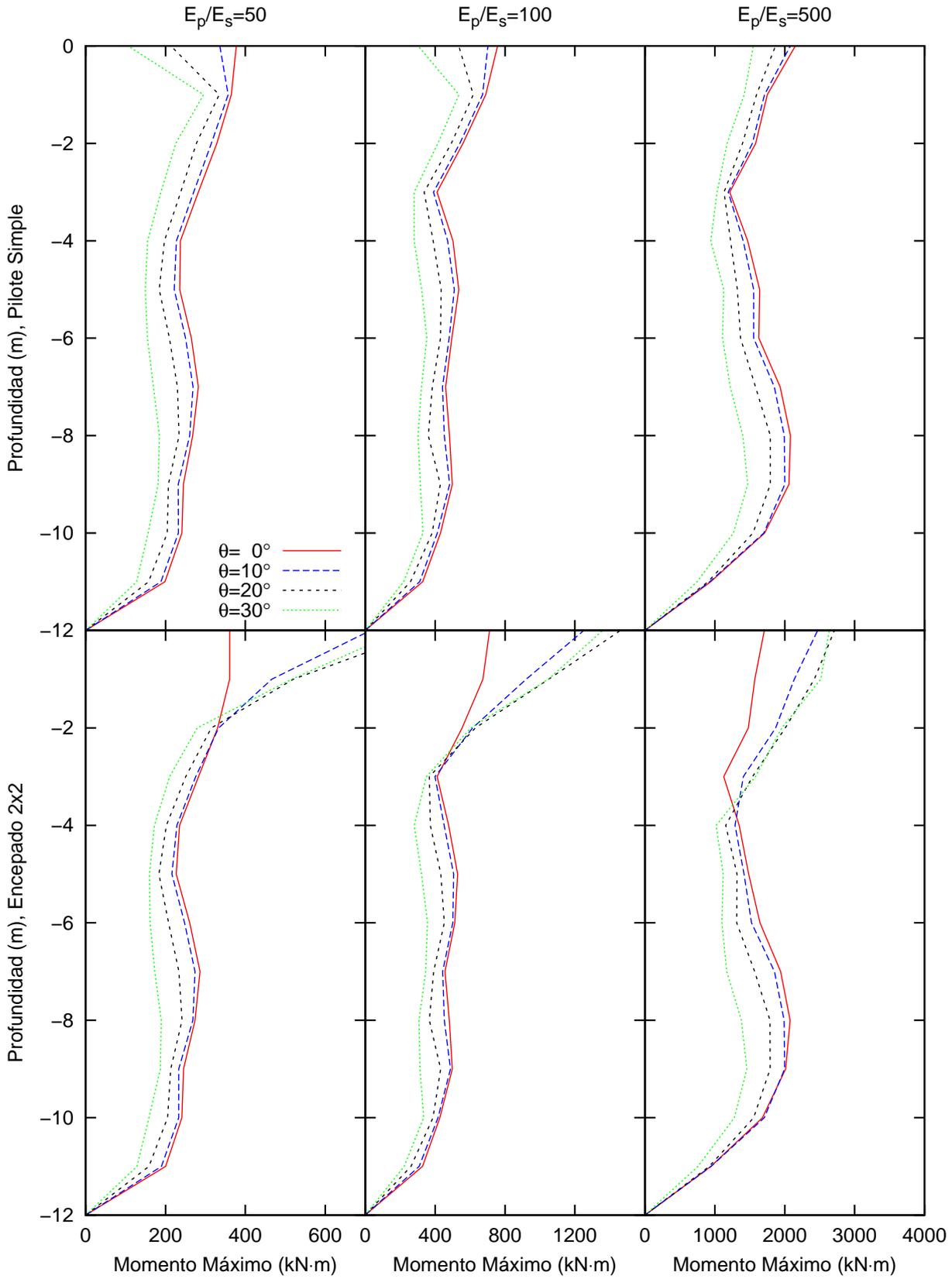


Figura 3.26: Comparación de momentos, $d = 1.2\text{ m}$ y terremoto C2

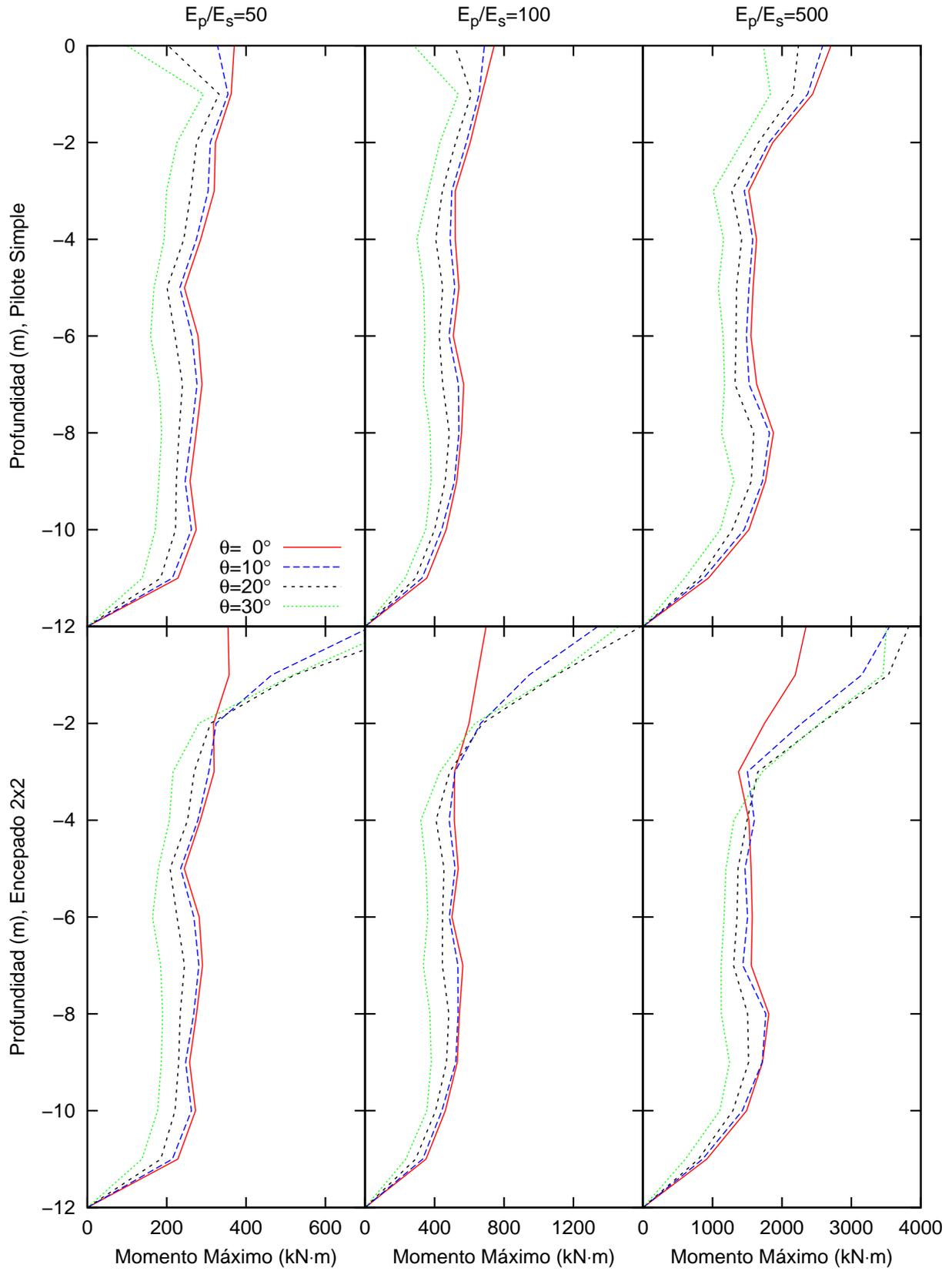


Figura 3.27: Comparación de momentos, $d = 1.2$ m y terremoto C3

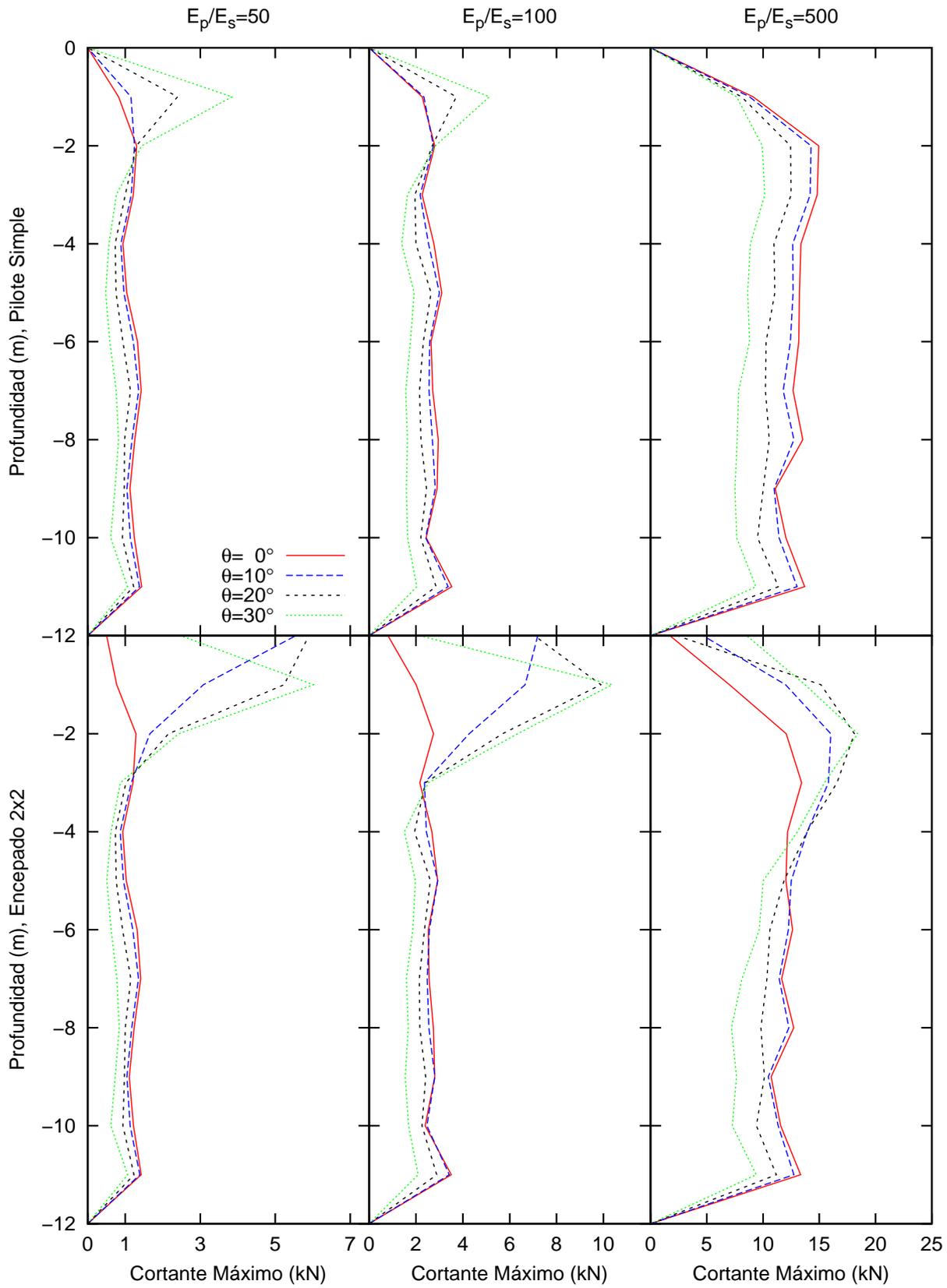


Figura 3.28: Comparación de cortantes, $d = 0.6$ m y terremoto C1

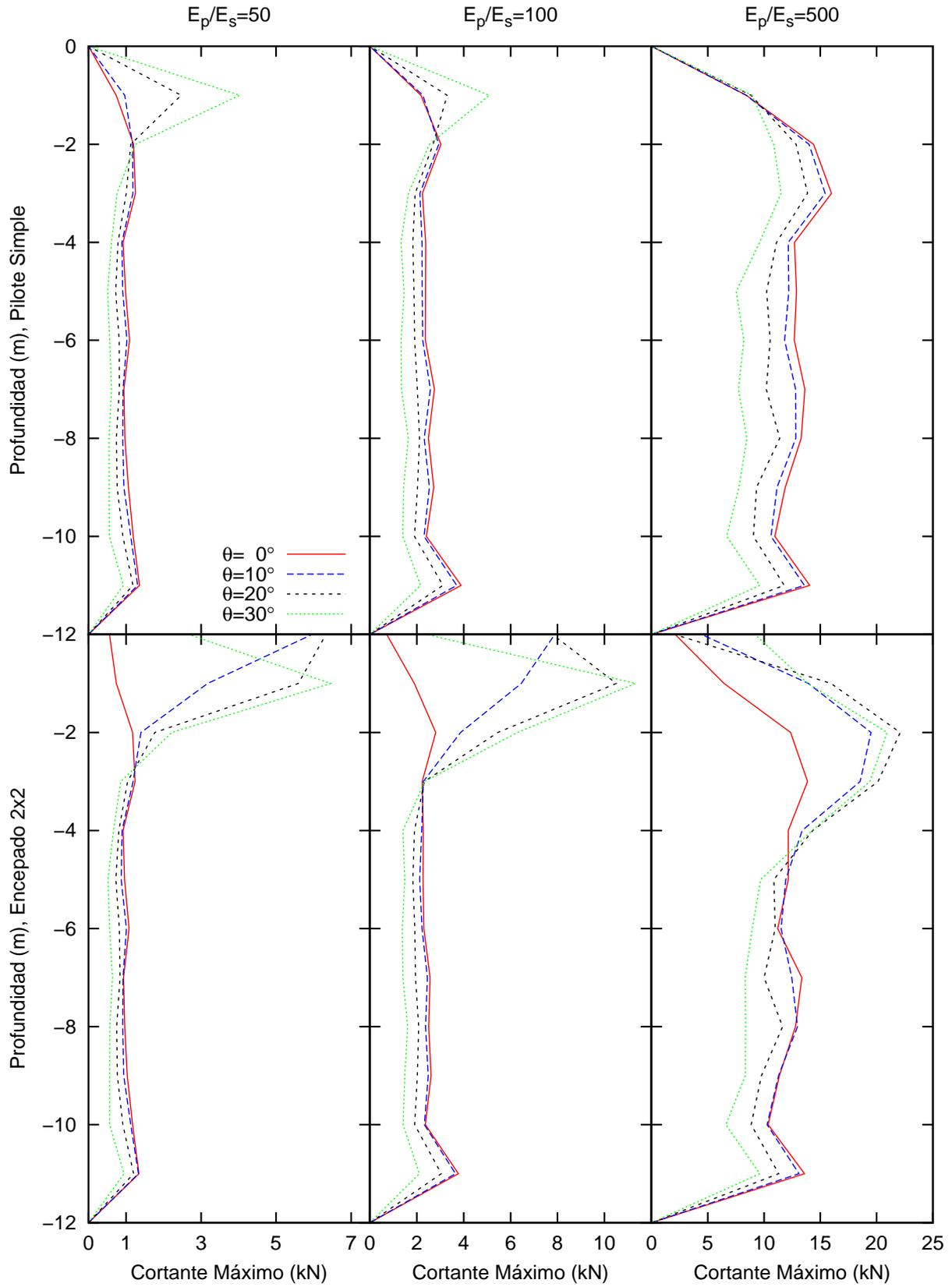


Figura 3.29: Comparación de cortantes, $d = 0.6$ m y terremoto C2

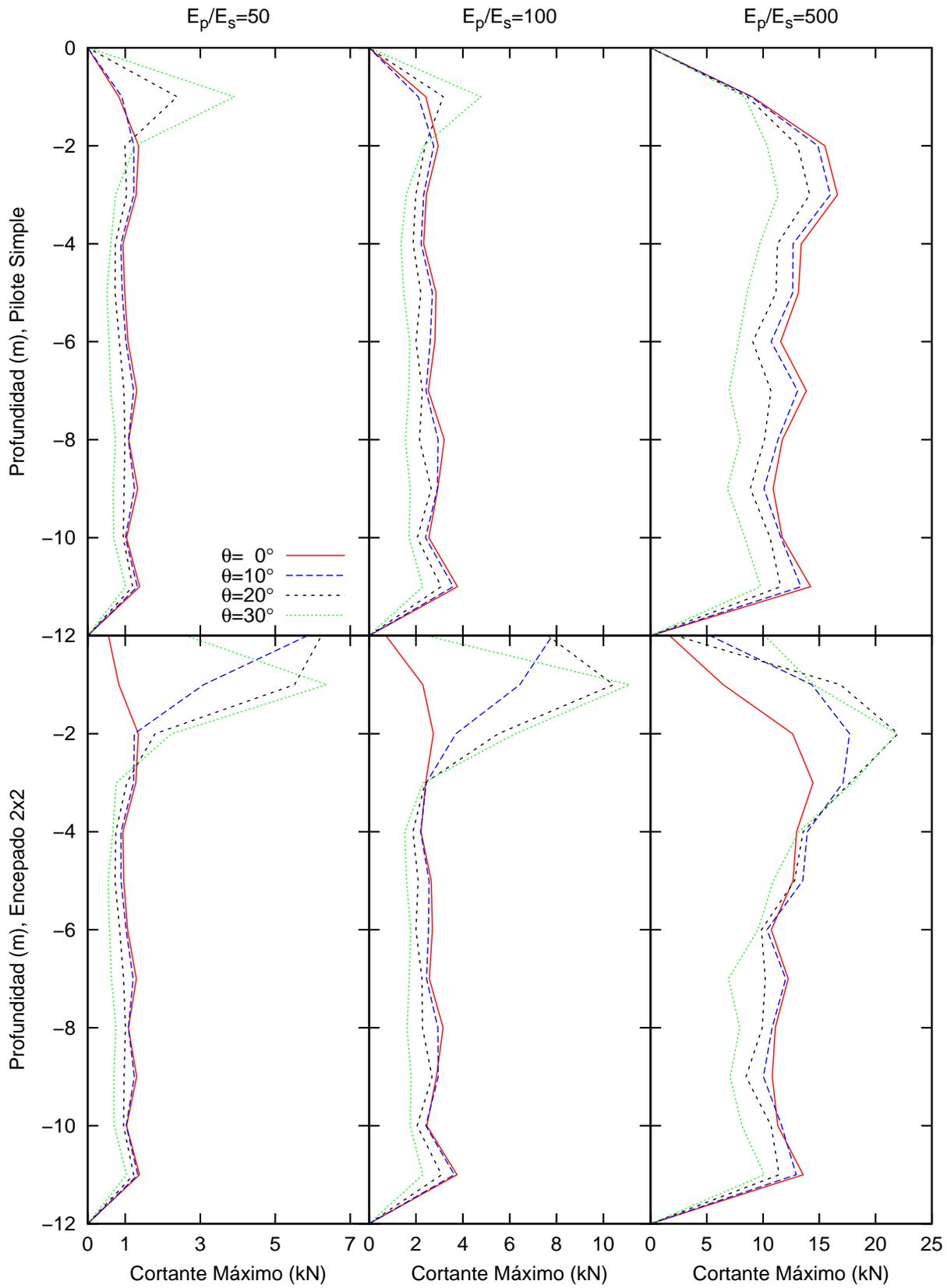


Figura 3.30: Comparación de cortantes, $d = 0.6$ m y terremoto C3

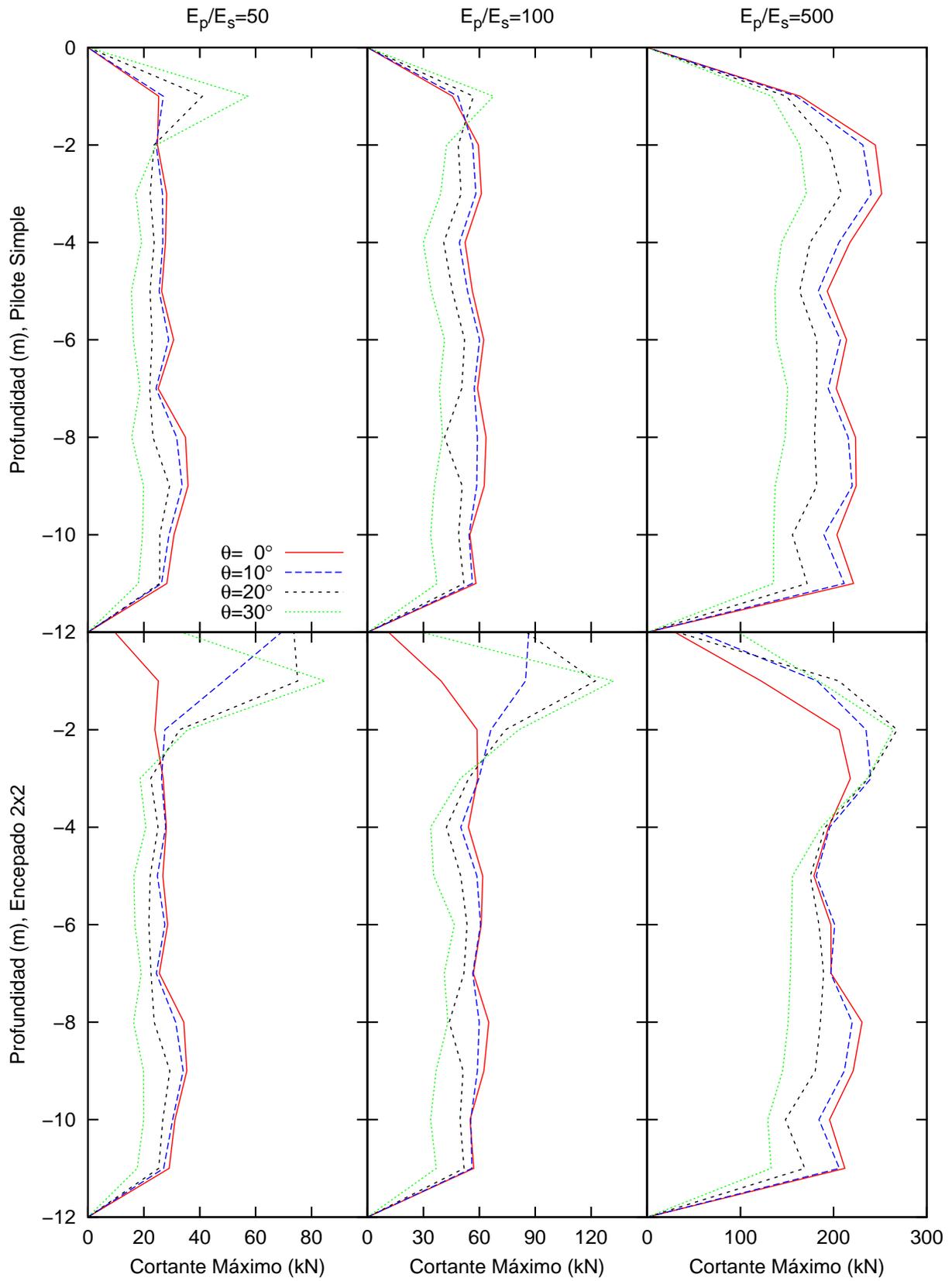


Figura 3.31: Comparación de cortantes, $d = 1.2$ m y terremoto C1

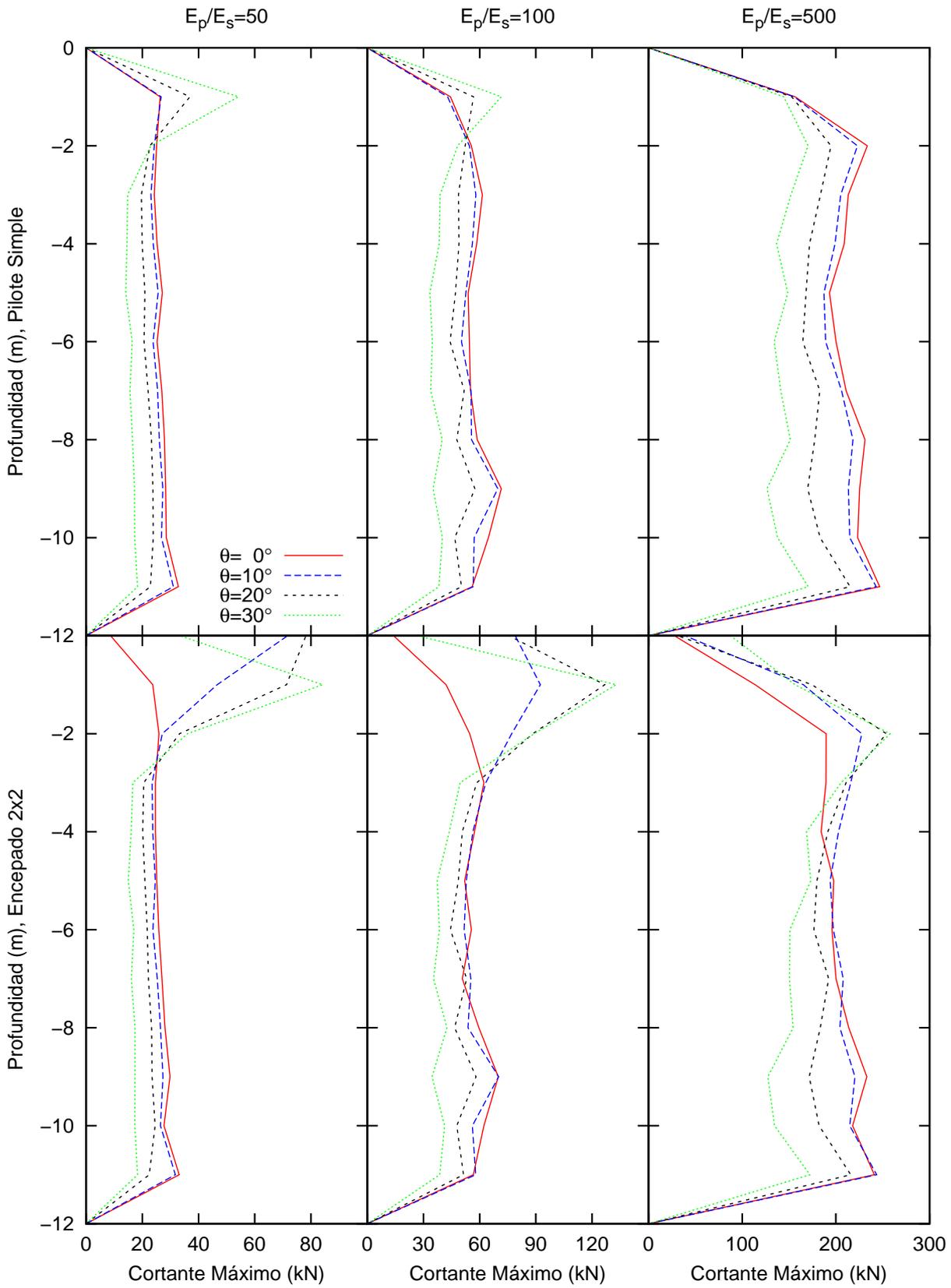


Figura 3.32: Comparación de cortantes, $d = 1.2\text{ m}$ y terremoto C2

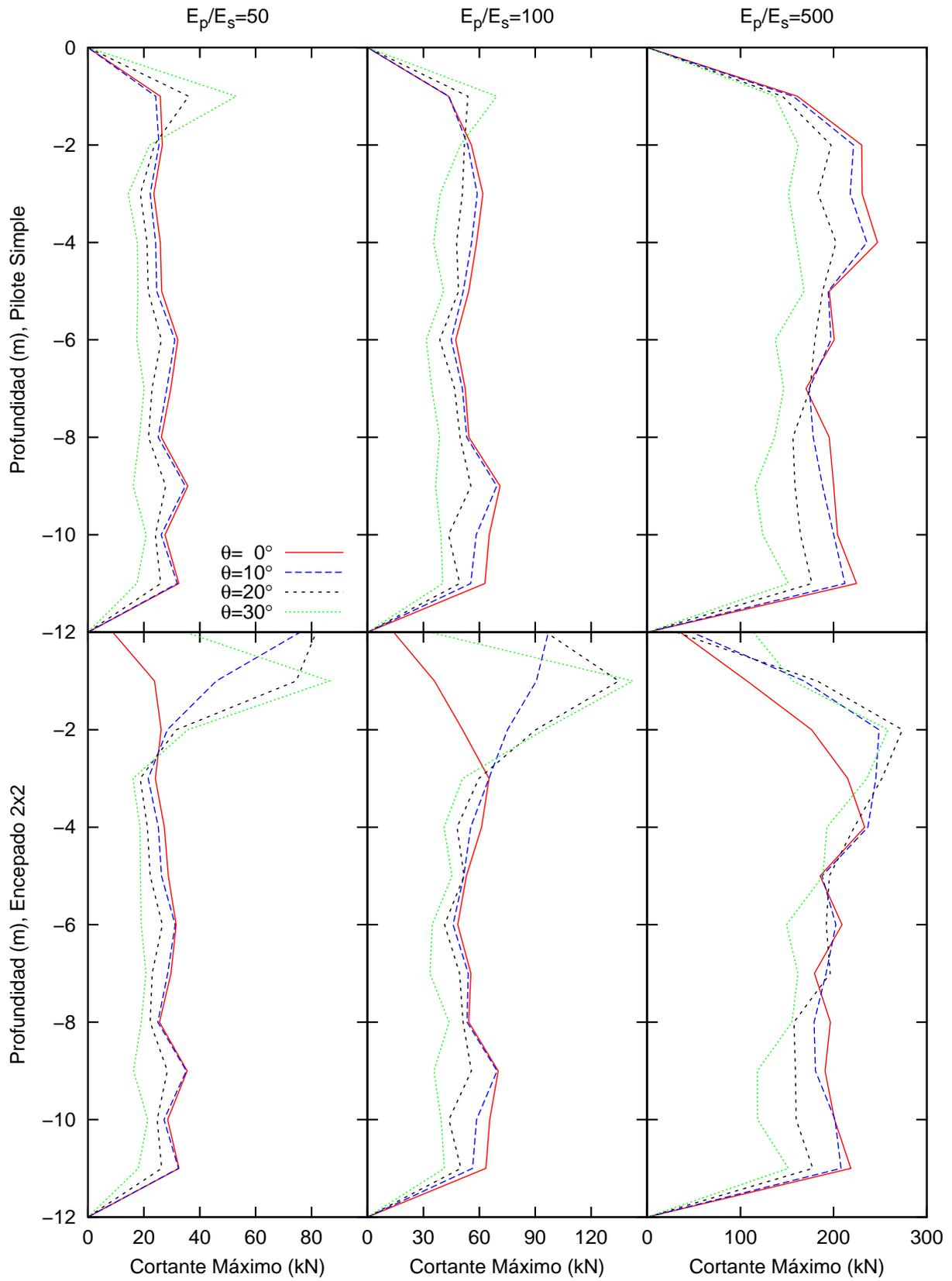


Figura 3.33: Comparación de cortantes, $d = 1.2$ m y terremoto C3

3 Resultados

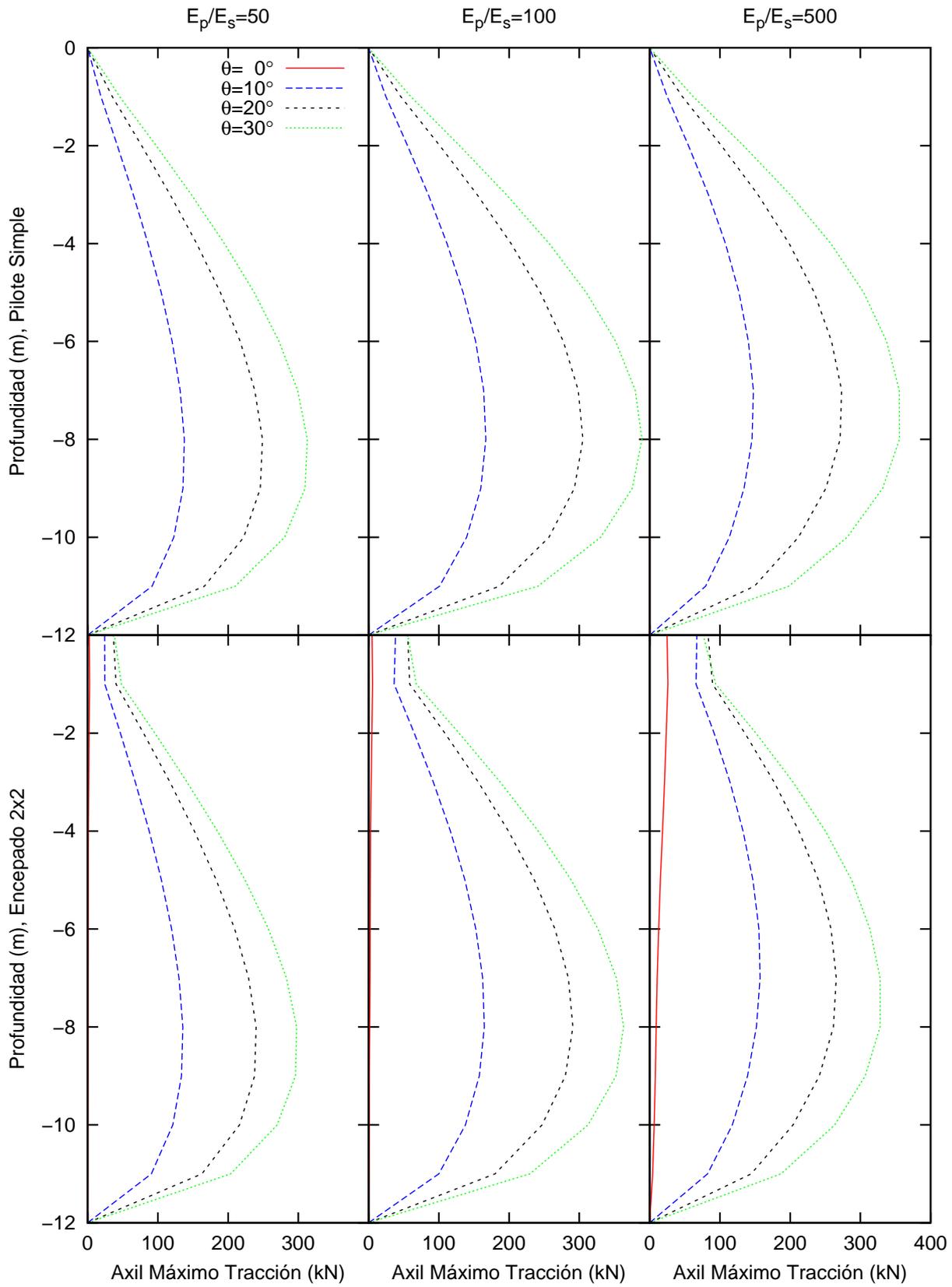


Figura 3.34: Comparación de axiles de tracción, $d = 0.6$ m y terremoto C1

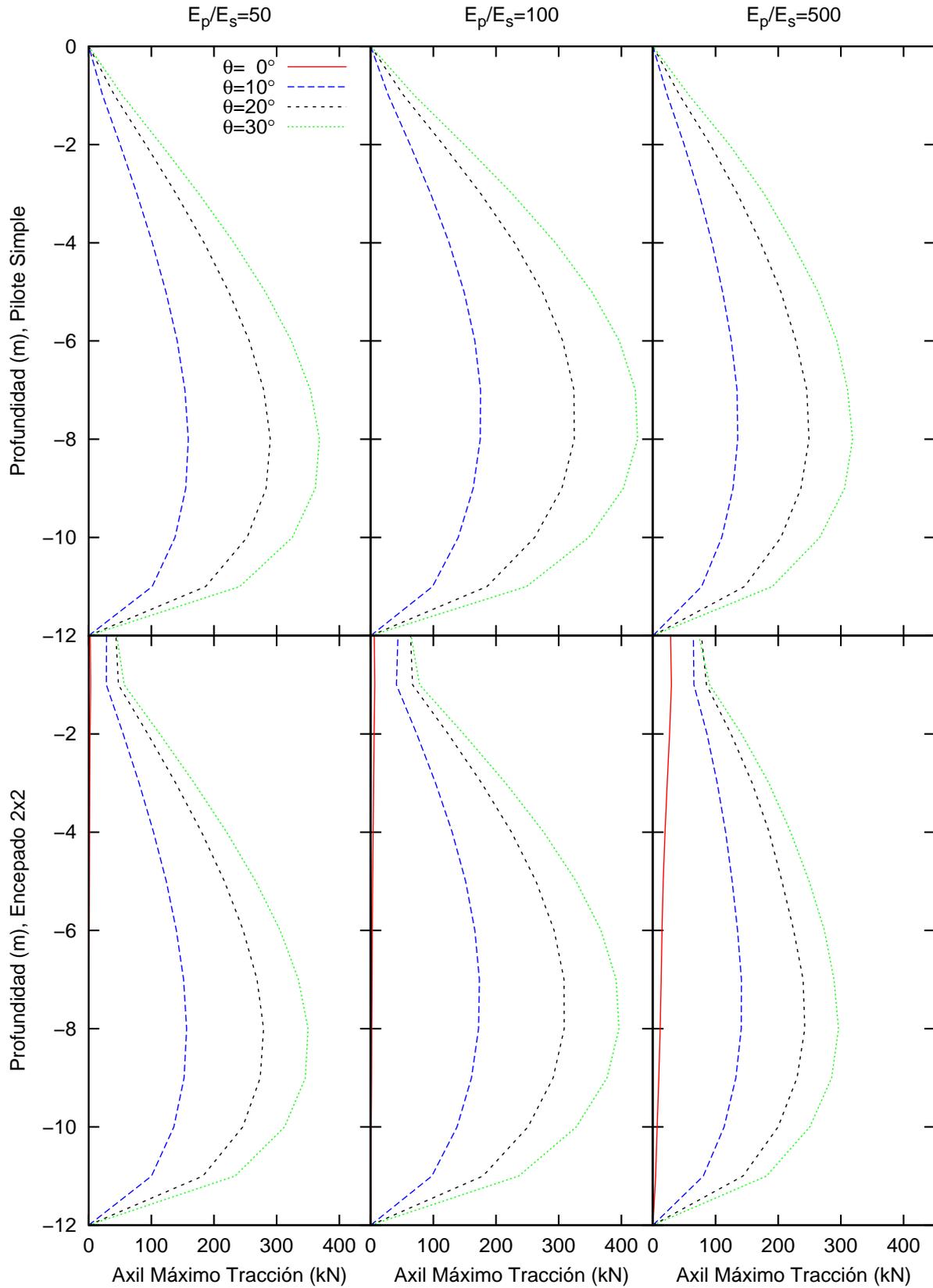


Figura 3.35: Comparación de axiles de tracción, $d = 0.6$ m y terremoto C2

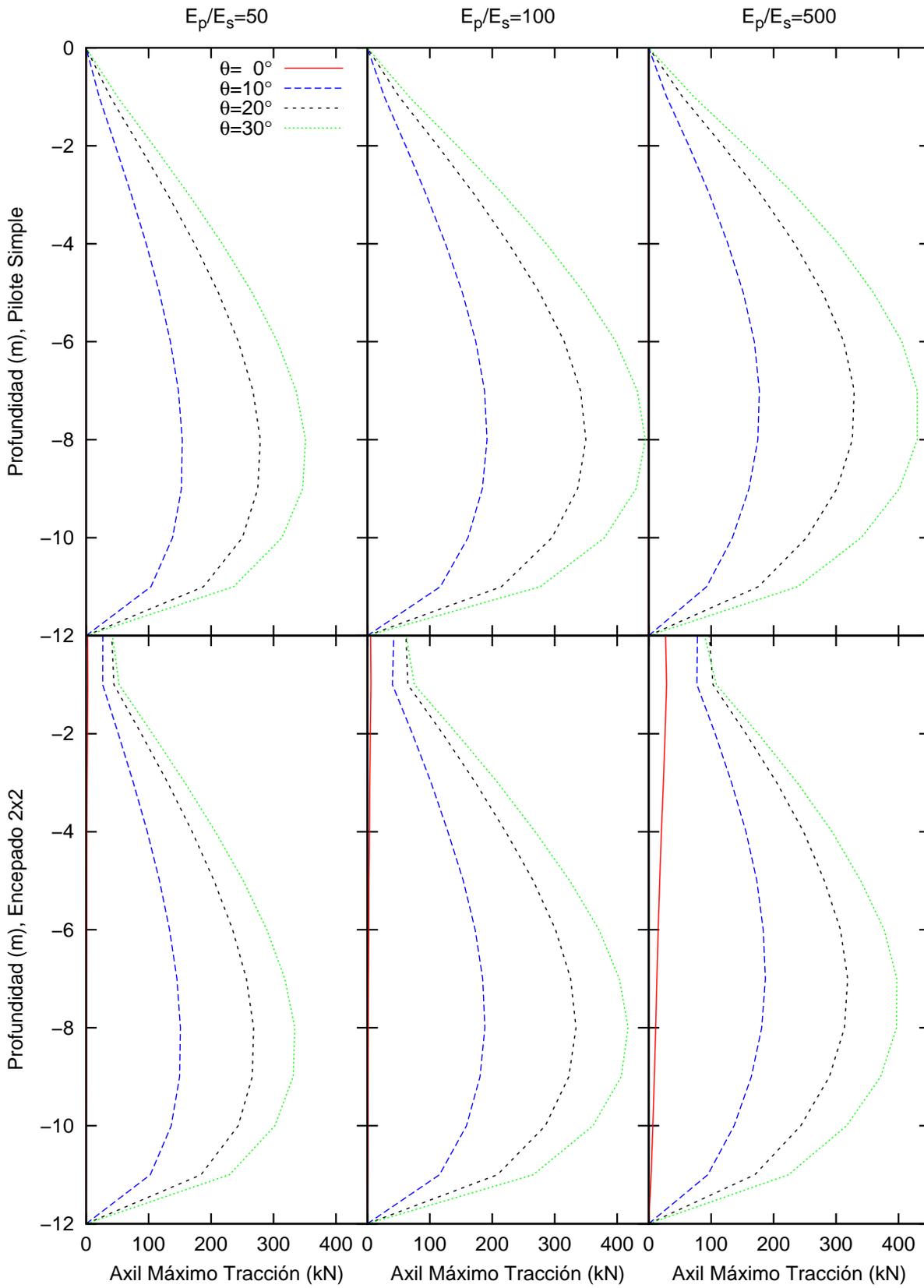


Figura 3.36: Comparación de axiles de tracción, $d = 0.6$ m y terremoto C3

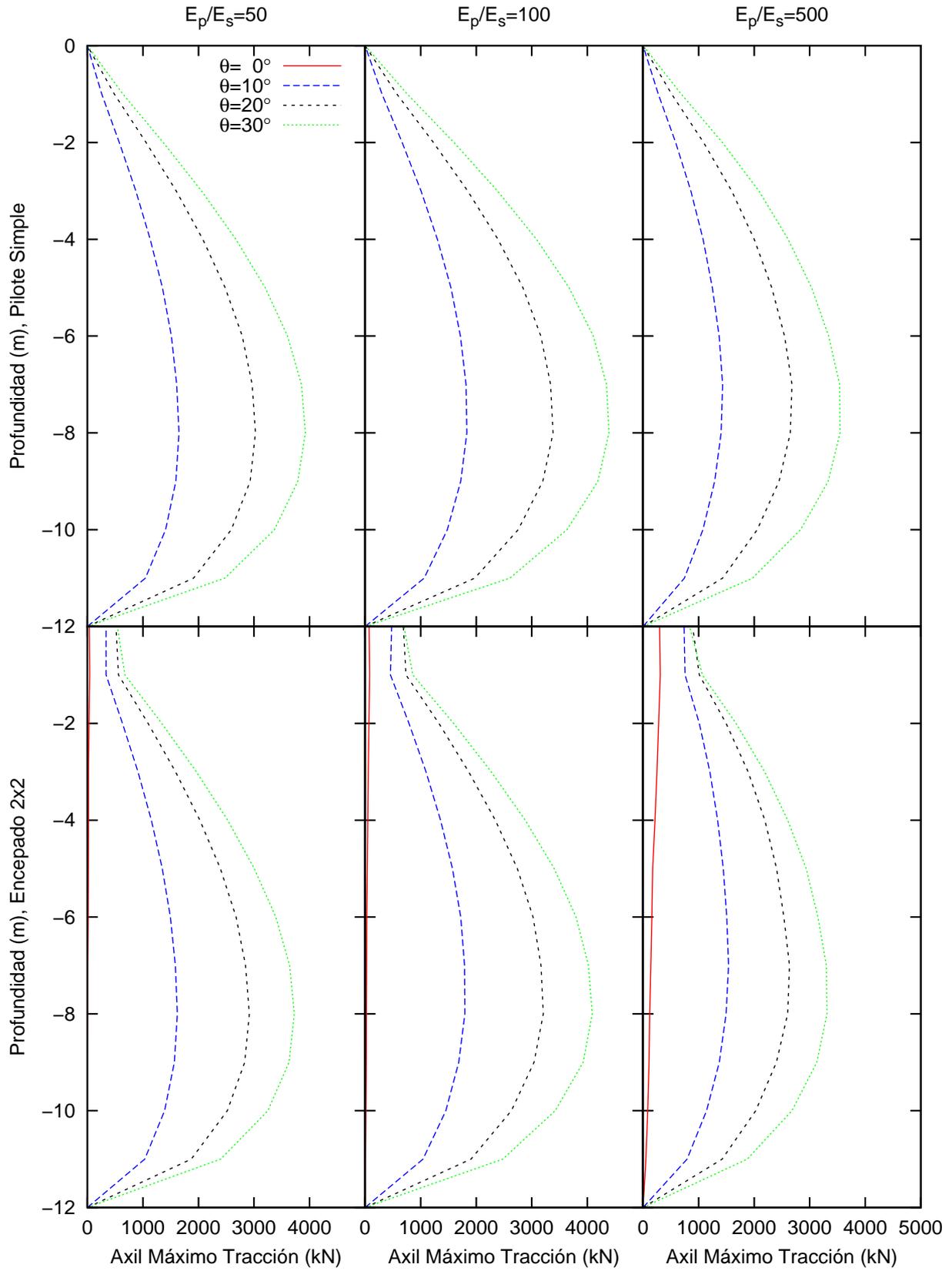


Figura 3.37: Comparación de axiles de tracción, $d = 1.2$ m y terremoto C1

3 Resultados

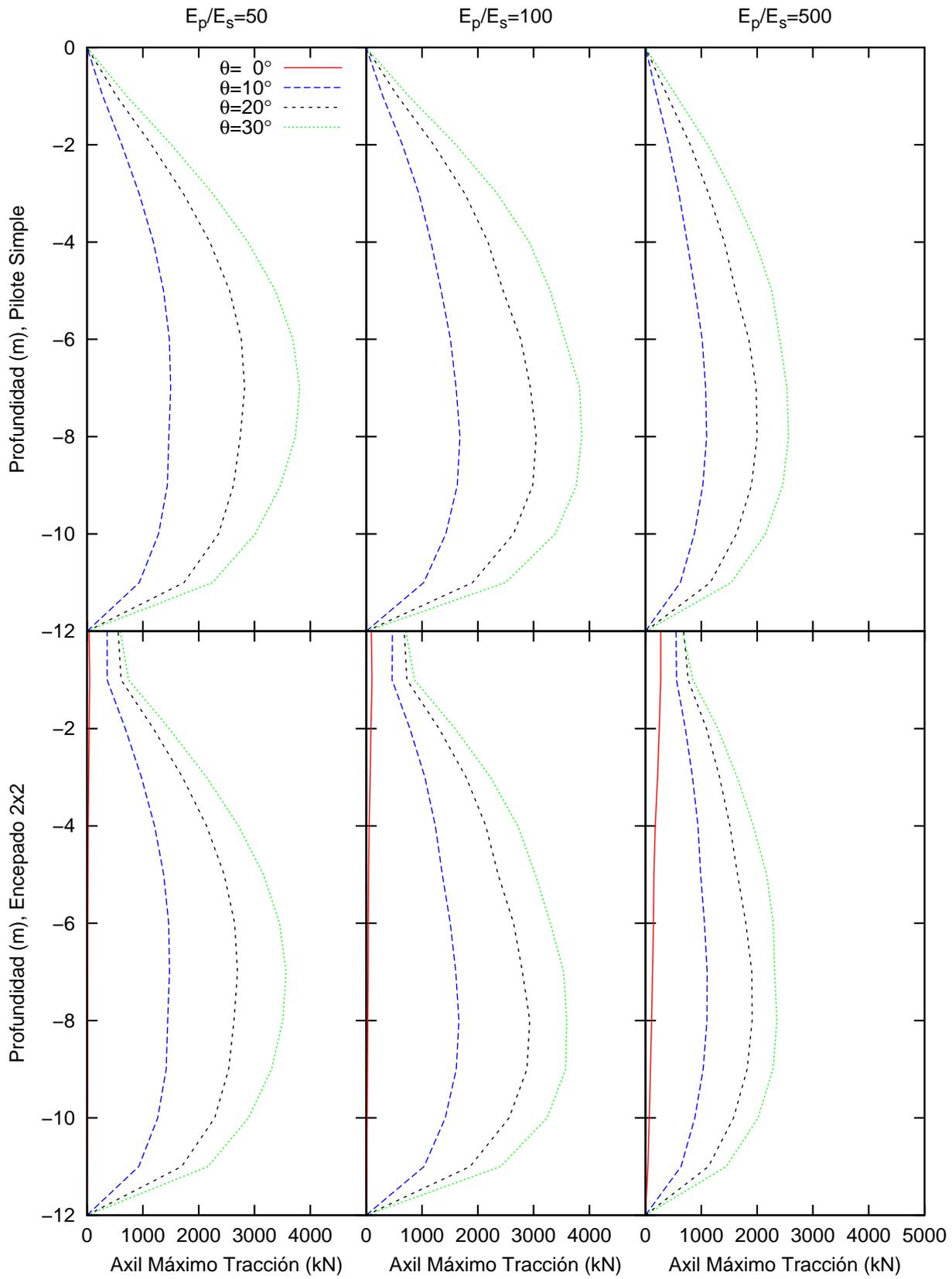


Figura 3.38: Comparación de axiles de tracción, $d = 1.2\text{ m}$ y terremoto C2

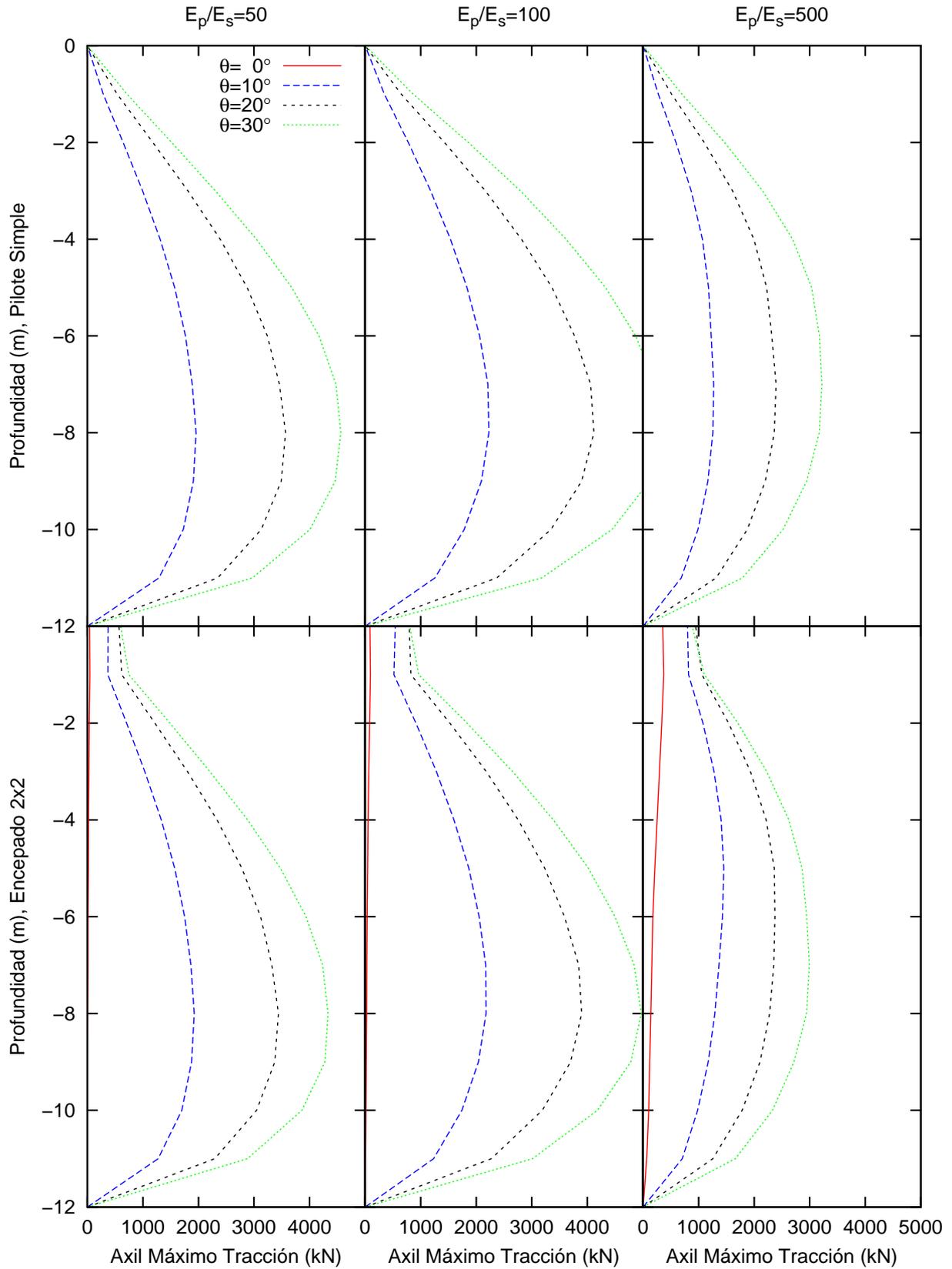


Figura 3.39: Comparación de axiles de tracción, $d = 1.2$ m y terremoto C3

3 Resultados

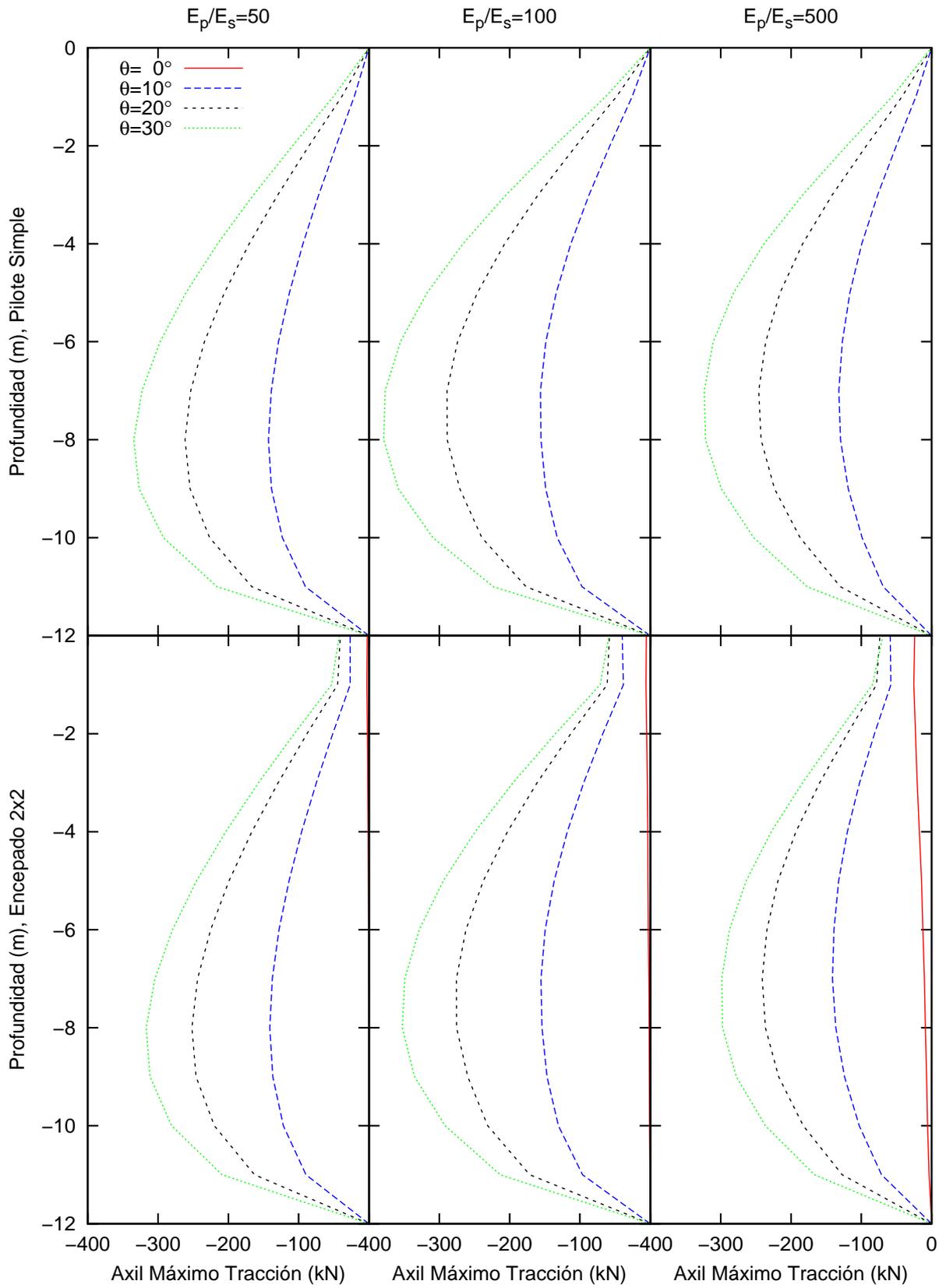


Figura 3.40: Comparación de axiles de compresión, $d = 0.6$ m y terremoto C1

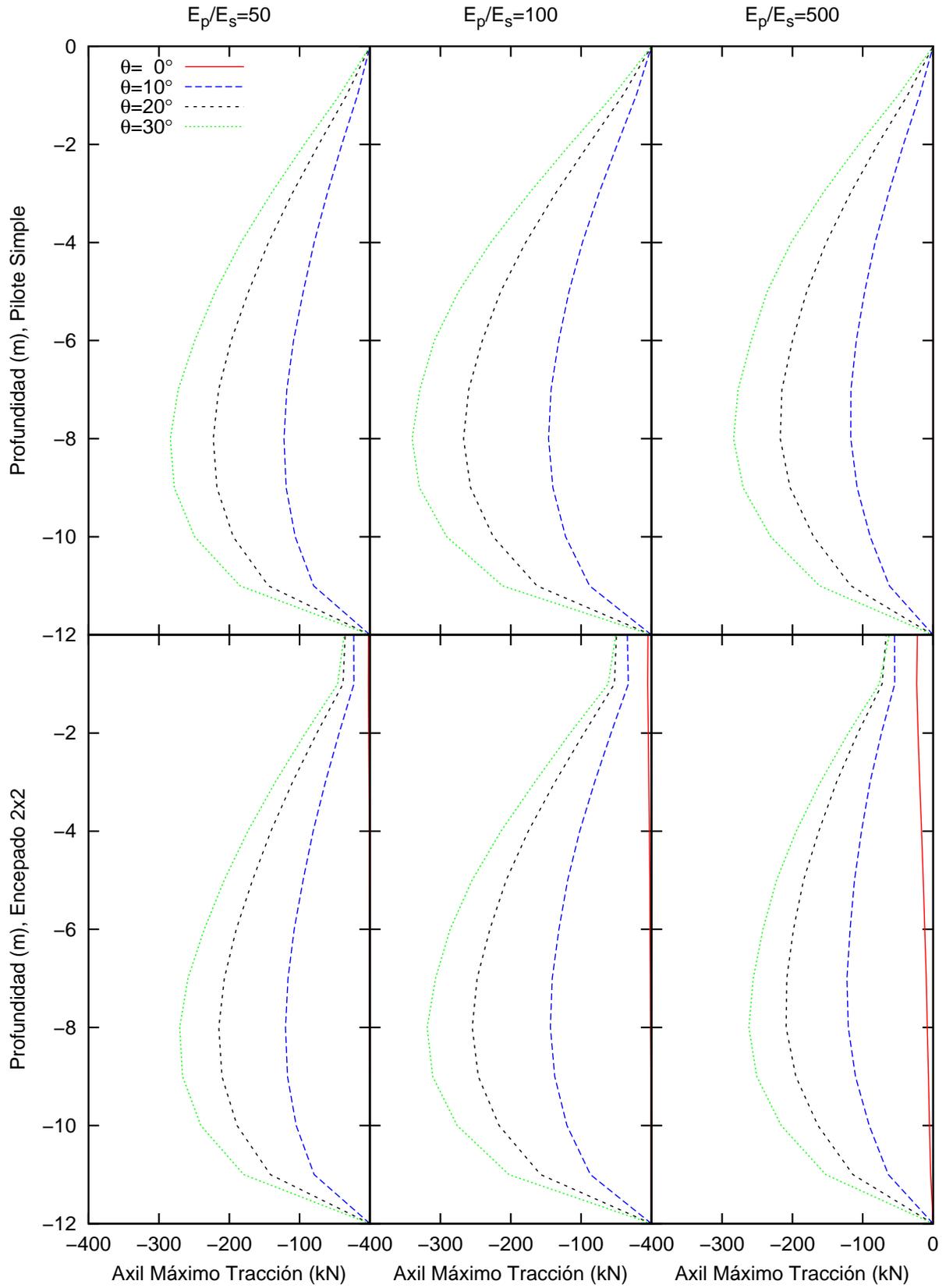


Figura 3.41: Comparación de axiles de compresión, $d = 0.6$ m y terremoto C2

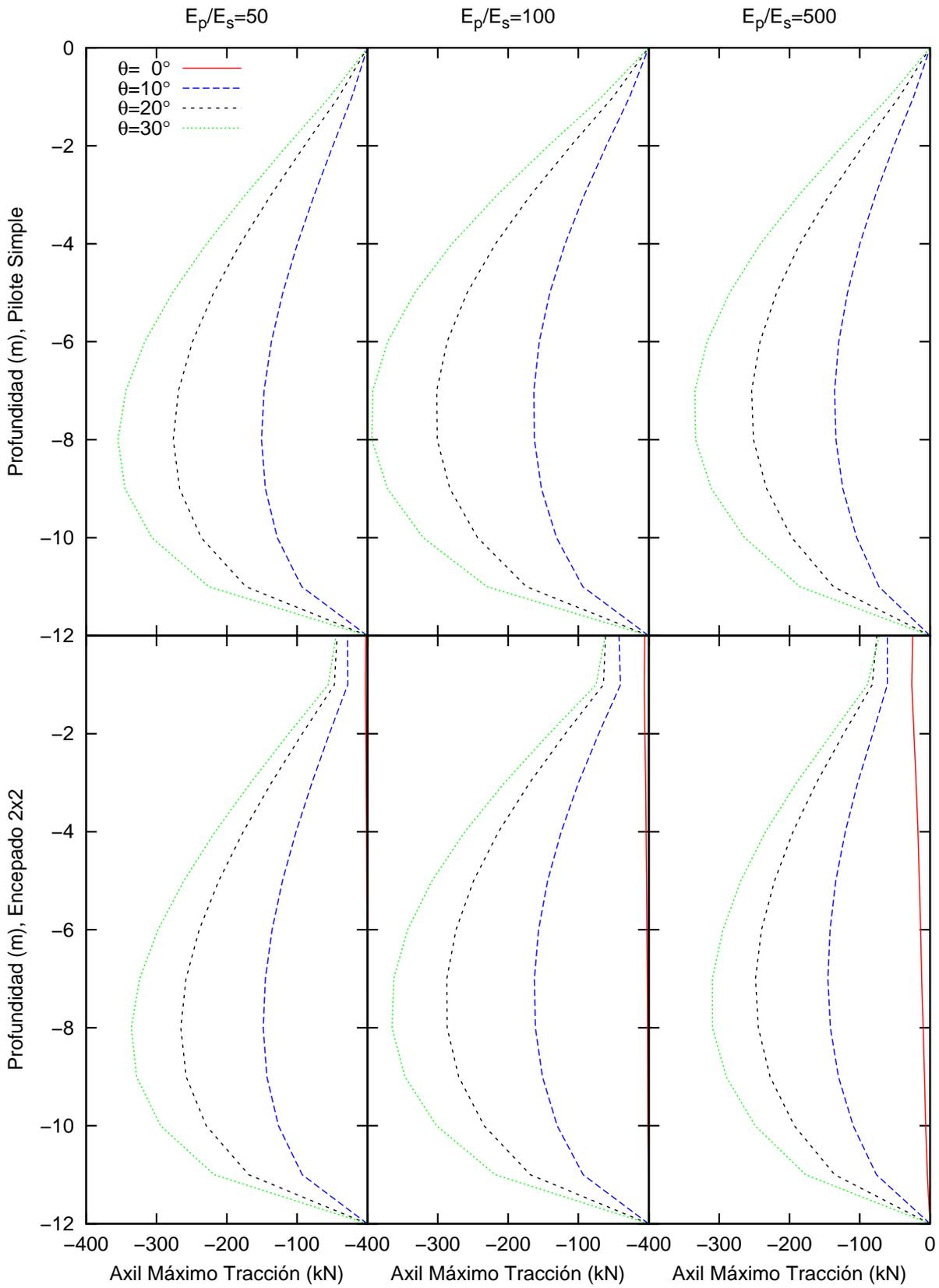


Figura 3.42: Comparación de axiles de compresión, $d = 0.6$ m y terremoto C3

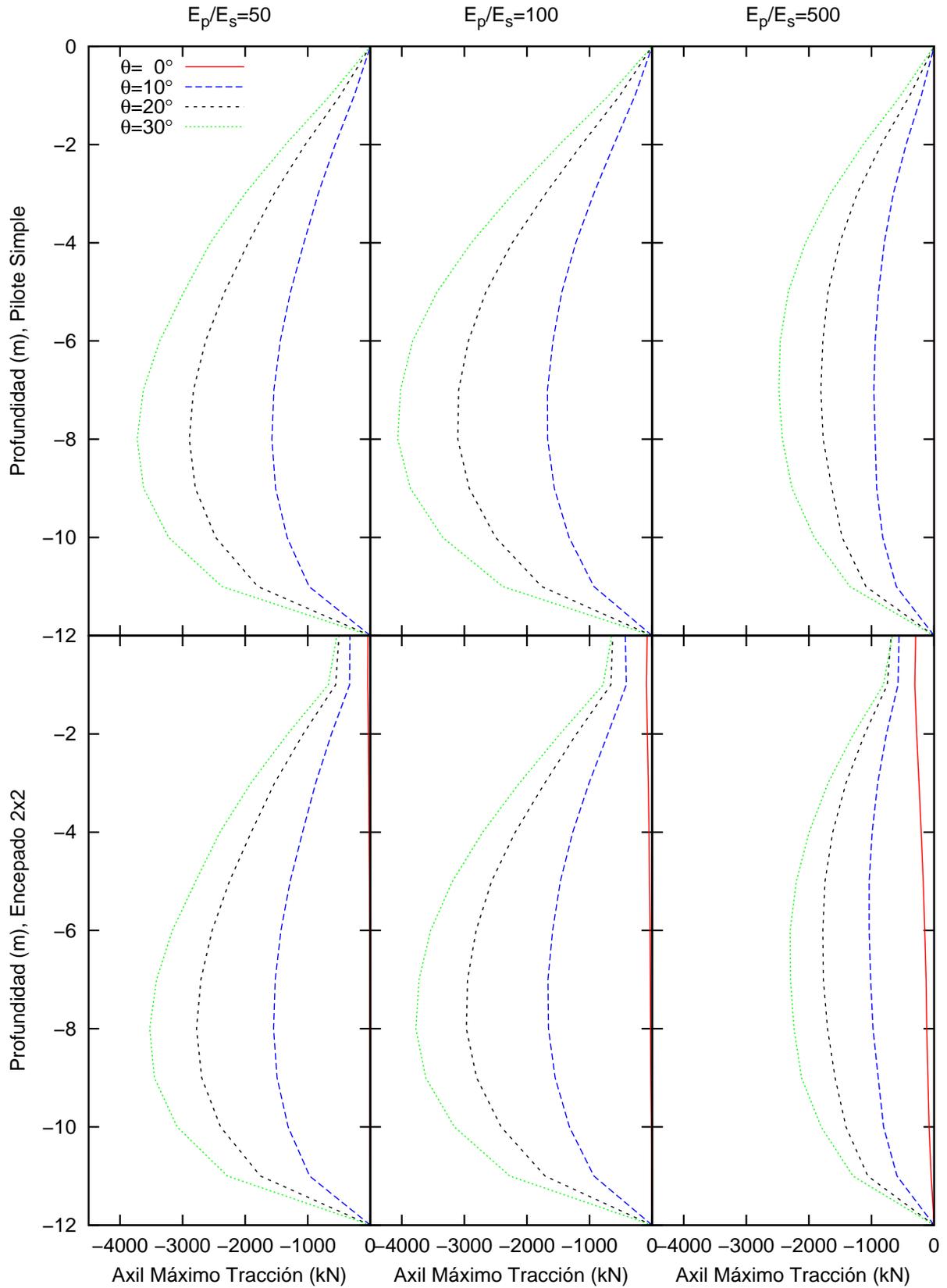


Figura 3.43: Comparación de axiles de compresión, $d = 1.2\text{ m}$ y terremoto C1

3 Resultados

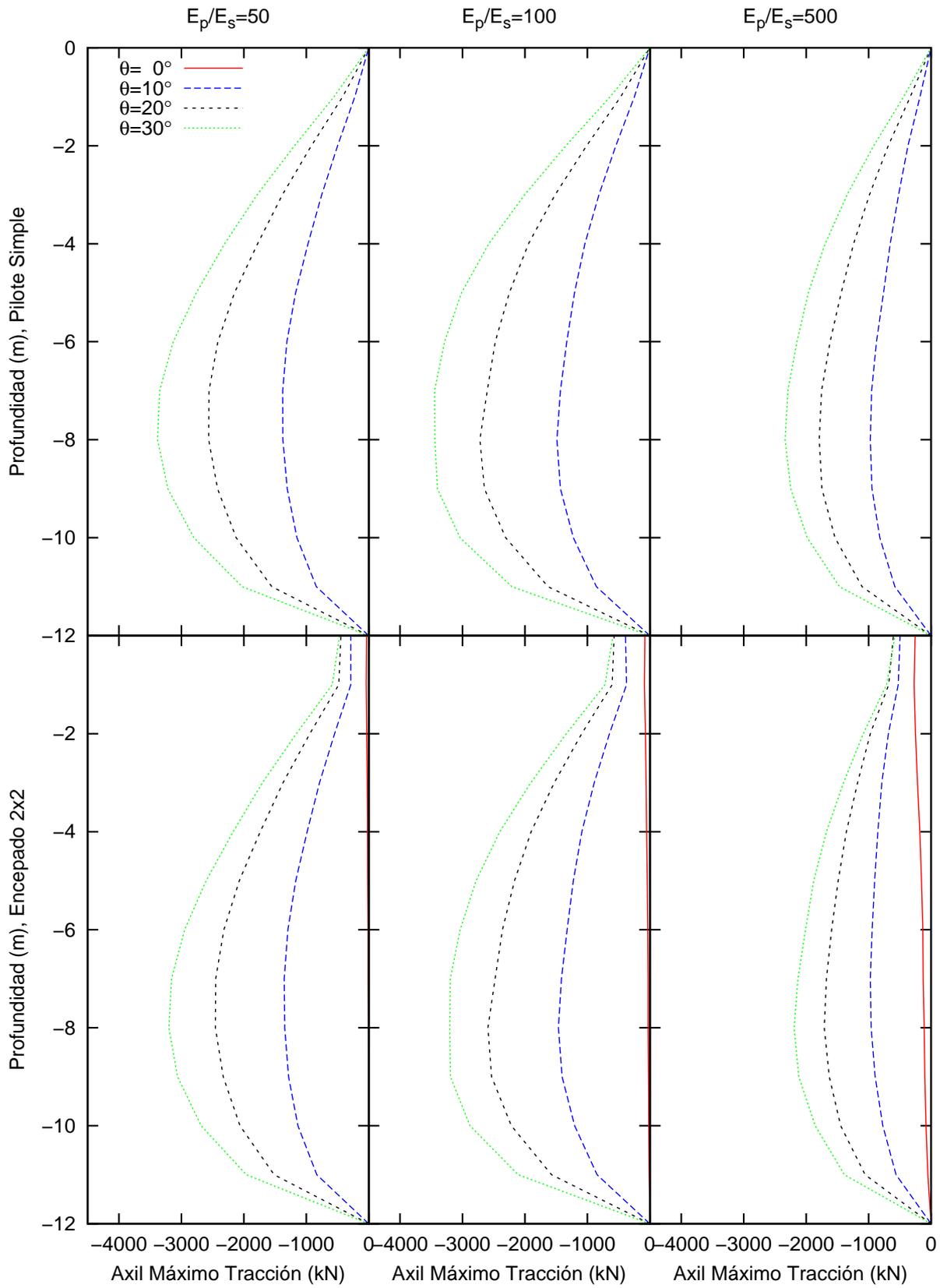


Figura 3.44: Comparación de axiles de compresión, $d = 1.2$ m y terremoto C2

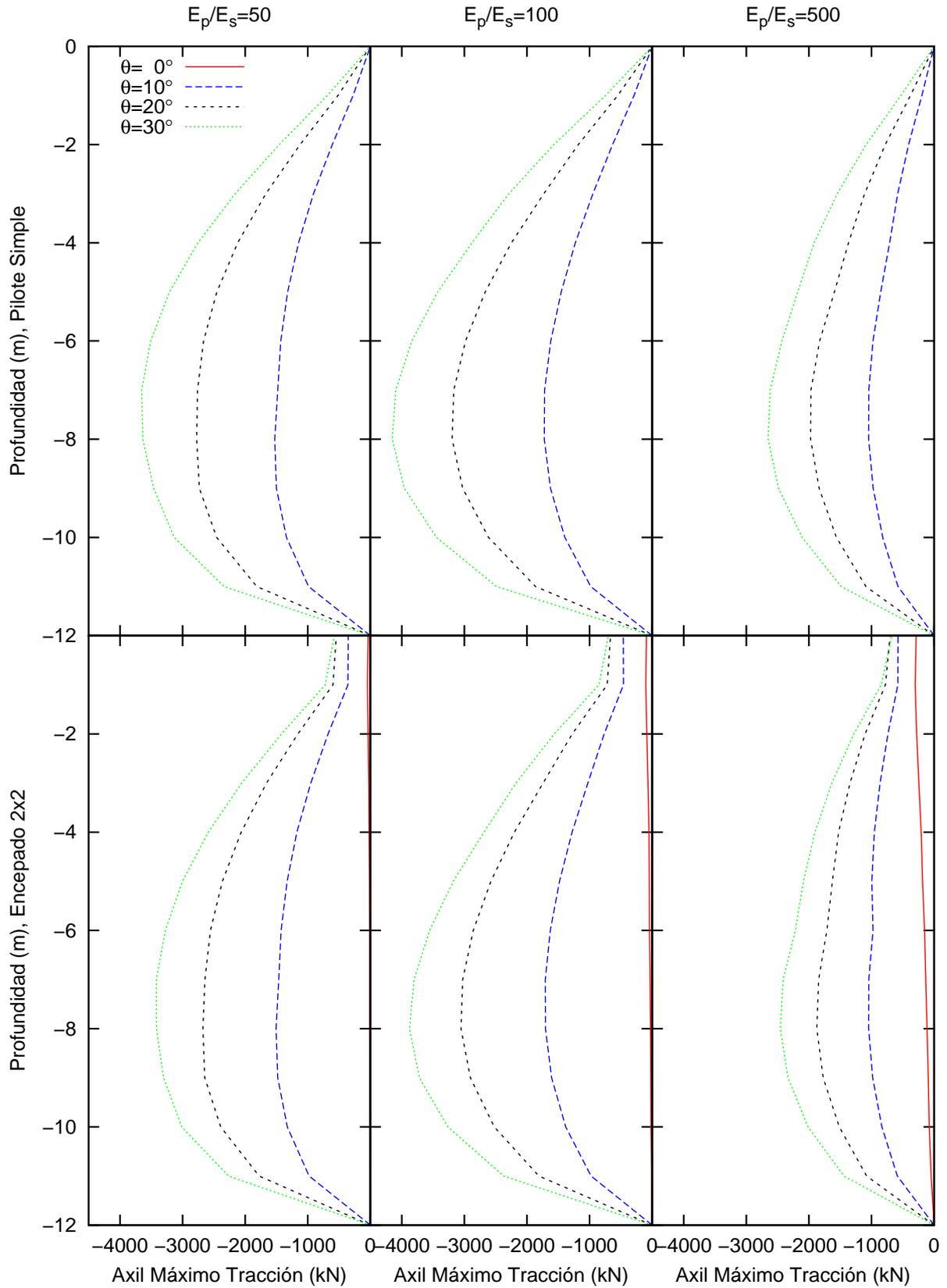


Figura 3.45: Comparación de axiles de compresión, $d = 1.2\text{ m}$ y terremoto C3

3.6 Factores de interacción cinemática

A continuación se exponen los factores de interacción cinemática para las dos configuraciones de la cimentación enterrada, pilote simple y encepado de pilotes. Se presentan en comparación para cada tipo de suelo.

Se representan los valores de I_u y I_ϕ en función de la frecuencia adimensional a_0 . Por un lado, I_u se define como el ratio entre el desplazamiento de la cabeza de la cimentación y el desplazamiento de campo libre, ambos medidos en la superficie del terreno.

$$I_u = \frac{u}{u_{ff}} \quad (3.2)$$

Por otra parte, el parámetro I_ϕ representa el giro de la cimentación adimensionalizado respecto del desplazamiento de campo libre y del radio de los pilotes.

$$I_\phi = \frac{\phi r}{u_{ff}} \quad (3.3)$$

En la figura 3.46 se observa como el aumento de la inclinación para la configuración de pilote simple es beneficioso en todos los casos, ya que con esta aumenta también el filtrado de energía procedente del terremoto para las frecuencias medias a altas. Es decir, la aceleración que transmite el encepado de la cimentación a la superestructura es, en todo caso, menor que la transmitida por la excitación a la cimentación y disminuye a medida que aumenta la inclinación del pilote.

Este fenómeno se repite para el caso del grupo de pilotes, figura 3.47. No obstante, para esta configuración y para frecuencias bajas a medias, con la inclinación de los pilotes también aumenta el giro transmitido por el encepado del grupo de pilotes a la estructura. Por ello, se debe tener en cuenta las características mecánicas de la superestructura que se edifica sobre esta cimentación.

En esta situación se ha de estudiar la posible respuesta de la superestructura que se edifique sobre el encepado del grupo de pilotes. Es decir, cuando se trate de un edificio de gran altura o esbeltez puede no ser favorable la inclinación de los pilotes, ya que al aumentar el giro del encepado de la cimentación se generarán grandes aceleraciones en los puntos más altos del edificio. Sin embargo, la inclinación de los pilotes contribuirá de forma beneficiosa a todas aquellas superestructuras en las que el giro no represente uno de los principales criterios de diseño, ya que el principal efecto será el aumento del filtrado de la energía.

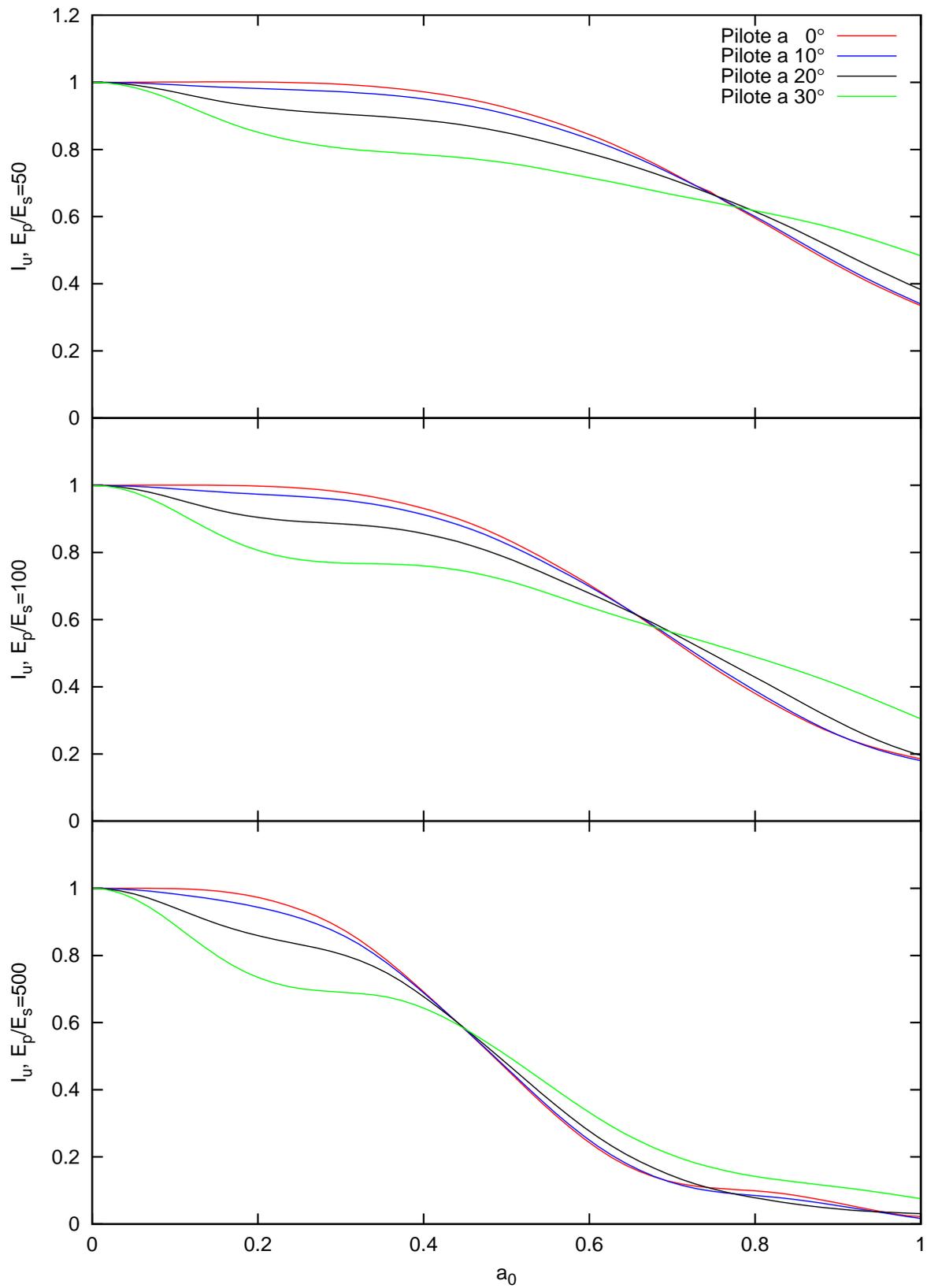


Figura 3.46: Factores de interacción cinemática para el pilote simple

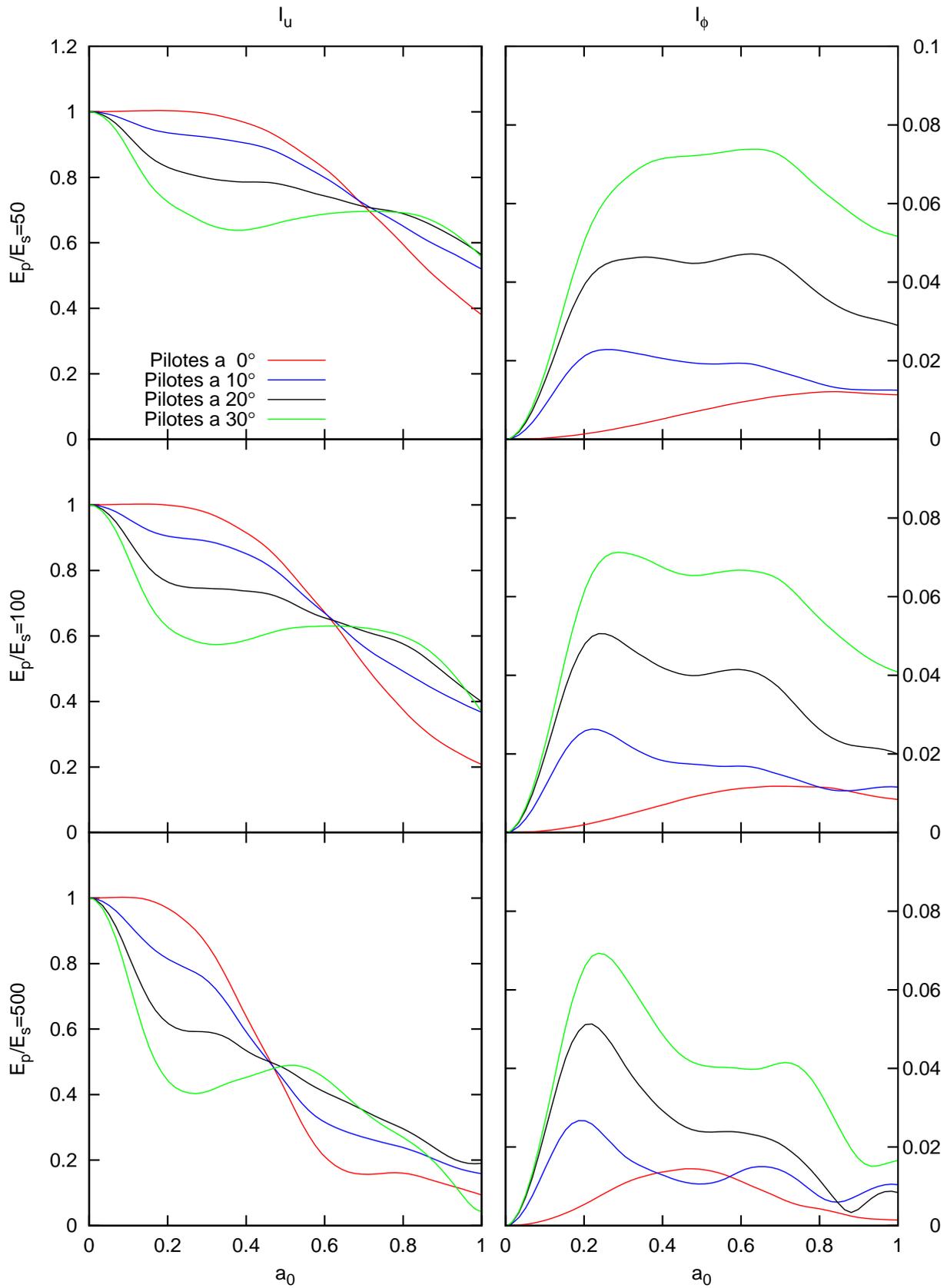


Figura 3.47: Factores de interacción cinemática para el encepado 2×2

3.7 Funciones de respuesta en frecuencia

Las funciones de respuesta en frecuencia correspondientes a momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles se exponen en el anexo A. Para cada esfuerzo se representan el valor absoluto y la parte real e imaginaria de tres funciones de respuesta en frecuencia correspondientes a las tres profundidades más significativas en cada caso. Así mismo, se distingue entre los tres tipos de suelo y las dos configuraciones de la cimentación estudiados.

Conclusiones

4.1 Resumen y conclusiones

El objetivo de este proyecto es analizar la influencia del ángulo de inclinación de los pilotes sobre los esfuerzos internos desarrollados en ellos. Para ello se han estudiado dos configuraciones de cimentaciones enterradas, pilote simple y encepado de 2×2 pilotes, para tres tipos de suelo diferente y con cuatro ángulos diferentes de inclinación para los pilotes. Este objetivo se ha perseguido mediante la obtención y el estudio de las envolventes de los diferentes esfuerzos internos, los factores de interacción cinemática y las funciones de respuesta en frecuencia de los mismos esfuerzos. De todo ello podemos extraer la siguiente serie de conclusiones:

- En relación al momento flector
 - Para el pilote simple, en todos los tipos de suelo, disminuyen los valores de este esfuerzo a medida que aumenta la inclinación del pilote.
 - Para el grupo de pilotes y en profundidades no comprendidas en el primer cuarto de longitud de los pilotes, el momento flector disminuye a medida que estos se inclinan.
 - En el grupo de 2×2 pilotes y para profundidades comprendidas en el primer cuarto de la longitud de los mismos, los valores del momento flector en la cabeza aumentan con la inclinación hasta un máximo, que se da para 20° , de hasta 3 veces el valor del momento en el mismo punto para el pilote vertical. A partir del máximo, al aumentar la inclinación, el momento en la cabeza disminuye. Las causas principales de este fenómeno las podemos encontrar en las restricciones cinemáticas impuestas por el encepado rígido unidas a los efectos de interacción cinemática entre pilotes en el mismo.
 - Para ambas configuraciones de cimentación enterrada, a medida que se pasa a suelos más blandos aumenta la escala de valores del momento flector.
- En relación al cortante
 - Para el pilote simple y para todos los suelos, en profundidades mayores de 2 m el valor de este esfuerzo disminuye con la inclinación del pilote.
 - Para el pilote simple y para los suelos con $E_p/E_s = 50$ y 100, existen picos de esfuerzo cortante en profundidades inferiores a 2 m, siendo estos más acentuados cuanto mayor es la inclinación del pilote. Además, este esfuerzo toma valores nulos en la cabeza del pilote para todas las inclinaciones.
 - Para la configuración de grupo de pilotes y profundidades no comprendidas en el primer cuarto de la longitud de los mismos, a medida que se aumenta la inclinación disminuyen los valores del esfuerzo cortante para todos los tipos de suelo.

- Para el grupo de 2×2 pilotes y profundidades comprendidas en el primer cuarto, en todos los tipos de suelo se aprecian picos de este esfuerzo que se acentúan con la inclinación de los pilotes.
 - En la cabeza de la cimentación para la configuración de 2×2 pilotes, el valor del cortante toma valores no nulos que varían con la inclinación, siendo el máximo de hasta 12 veces el valor para la misma profundidad de los pilotes verticales para $E_p/E_s = 50$, de hasta 8 veces el valor de los pilotes verticales para el suelo con $E_p/E_s = 100$ y de hasta 4 veces para $E_p/E_s = 500$. La vinculación de los desplazamientos horizontales impuesta por el encepado rígido hace que aumenten los valores de este esfuerzo en la cabeza a medida que se inclinan los pilotes.
 - La escala del esfuerzo cortante aumenta cuanto más blando es el suelo para ambas configuraciones de la cimentación enterrada.
- En relación a los esfuerzos axiales de tracción y compresión
- Tanto para el pilote simple como para el grupo de 2×2 pilotes y para todos los tipos de suelo, los valores de este esfuerzo aumentan con la inclinación del pilote.
 - Como es lógico deducir, dado el campo incidente definido, los axiles toman valores nulos para el pilote simple vertical. Así mismo, para todas las inclinaciones, este esfuerzo tiene valor nulo en la cabeza para dicha configuración.
 - No obstante, no ocurre lo mismo con el grupo de pilotes. Aparecen pequeños valores de esfuerzo axil para pilotes verticales tanto en la cabeza como a lo largo de los mismos. Los valores de este esfuerzo en la cabeza de la cimentación se justifican al observar el parámetro I_ϕ , donde para el pilote vertical y frecuencias medias existen pequeños giros del encepado, lo que provoca la aparición de esfuerzo axil en la cabeza de los pilotes. Al girar el encepado, el pilote queda sometido a esfuerzos axiales de tracción o compresión, explicando así la aparición de valores de este esfuerzo en toda su longitud.
 - Una explicación análoga es válida para los valores no nulos que aparecen en la cabeza de pilotes inclinados en el grupo 2×2 . Estos valores son mayores cuanto más se inclinan los pilotes, hasta un máximo de 3 veces el valor obtenido para pilotes verticales en el mismo punto.
 - Para ambas configuraciones, el cambio de tipo de suelo no afecta en ningún caso a la escala de valores de este esfuerzo, que se mantiene constante.

Referencias

- [1] Milos Novak, Toyooki Nogami, and Fakhry Aboul-Ella. Dynamic soil reactions for plane strain case. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 104 (4):953–959, 1978.
- [2] B. Verbic and A. S. Veletsos. Impulse response functions for elastic foundations. *SRR Report 15, Department of Civil Engineering, Rice University, Houston, Texas*, 1972.
- [3] G. Leoni F. Dezi, S. Carbonari. Kinematic bending moments in pile foundations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2009.
- [4] *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance. Part 5: Foundations, retaining structures and geotechnical aspects*. Standard EN-1998-1, CEN/TC 250, 2003.
- [5] N Deng, R Kulesza, and F Ostadan. Seismic soil-pile group interaction analysis of a battered pile group. In *Proceedings of the 4th international conference on Earthquake Geotechnical Engineering*, number 1733, page 1733, Thessaloniki, Greece, 2007.
- [6] Shahrour Isam, Alsaleh Hassan, and Souli Mhamed. 3D elastoplastic analysis of the seismic performance of inclined micropiles. *Computers and Geotechnics*, 39:1–7, January 2012.
- [7] Nikos Gerolymos, Amalia Giannakou, Ioannis Anastasopoulos, and George Gazetas. Evidence of beneficial role of inclined piles: observations and summary of numerical analyses. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 6(4):705–722, 2008.
- [8] A. Giannakou, N. Gerolymos, G. Gazetas, T. Tazoh, and I. Anastasopoulos. Seismic Behavior of Batter Piles: Elastic Response. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136(9):1187, 2010.
- [9] T Tazoh, M Sato, J Jang, Y Taji, G Gazetas, and Ioannis Anastasopoulos. Kinematic response of batter pile foundation: Centrifuge tests. In *3rd Greece-Japan workshop*, 2008.
- [10] S. Escoffier. Experimental study of the effect of inclined pile on the seismic behavior of pile group. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 42:275–291, November 2012.
- [11] *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance. Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings*. Standard EN-1998-1, CEN/TC 250, 2003.
- [12] R Matos Filho, A V Mendonça, and J B Paiva. Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. *Eng Anal Boundary Elem*, 29:195–203, 2005.
- [13] L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. A bem-fem model for studying dynamic impedances of piles in elastic soils. In B H V Topping, G Montero, and R Montenegro, editors, *Proc. of the Fifth Int Conf on Eng Comput Technology*, number 163, Stirlingshire, UK, 2006. Civil-Comp Press.

REFERENCIAS

- [14] L A Padrón, J J Aznárez, and O. Maeso. Bem-fem coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng Anal Bound Elem*, 31:473–484, 2007.
- [15] A M Kaynia. Dynamic stiffness and seismic response of pile groups. Technical Report R83-03, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1982.
- [16] R S Y Pak and P C Jennings. Elastodynamic response of the pile under transverse excitation. *J Eng Mech, ASCE*, 113(7):1101–1116, 1987.
- [17] R Sen, T G Davies, and P K Banerjee. Dynamic analysis of piles and pile groups embedded in homogeneous soils. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 13:53–65, 1985.
- [18] J Bielak. Dynamic behavior of structures with embedded foundations. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 3:259–274, 1975.
- [19] Vanmarcke EH. Simqke: A program for artificial motion generation. *Technical Report, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA*, 1976.
- [20] Alan S. Willsky Alan v. Oppenheim. *Sistemas y Senales*. Pearson.
- [21] L A Padrón. *Numerical Model for the Dynamic Analysis of Pile Foundations*. PhD thesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2009.
- [22] Steven L. Kramer. *Geotermical Earthquake Engineering*. Prentice Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics, 1996.

Parte *I*

Apéndices

Funciones de Respuesta en Frecuencia

A.1 Funciones de Respuesta en Frecuencia de Momentos Flectores

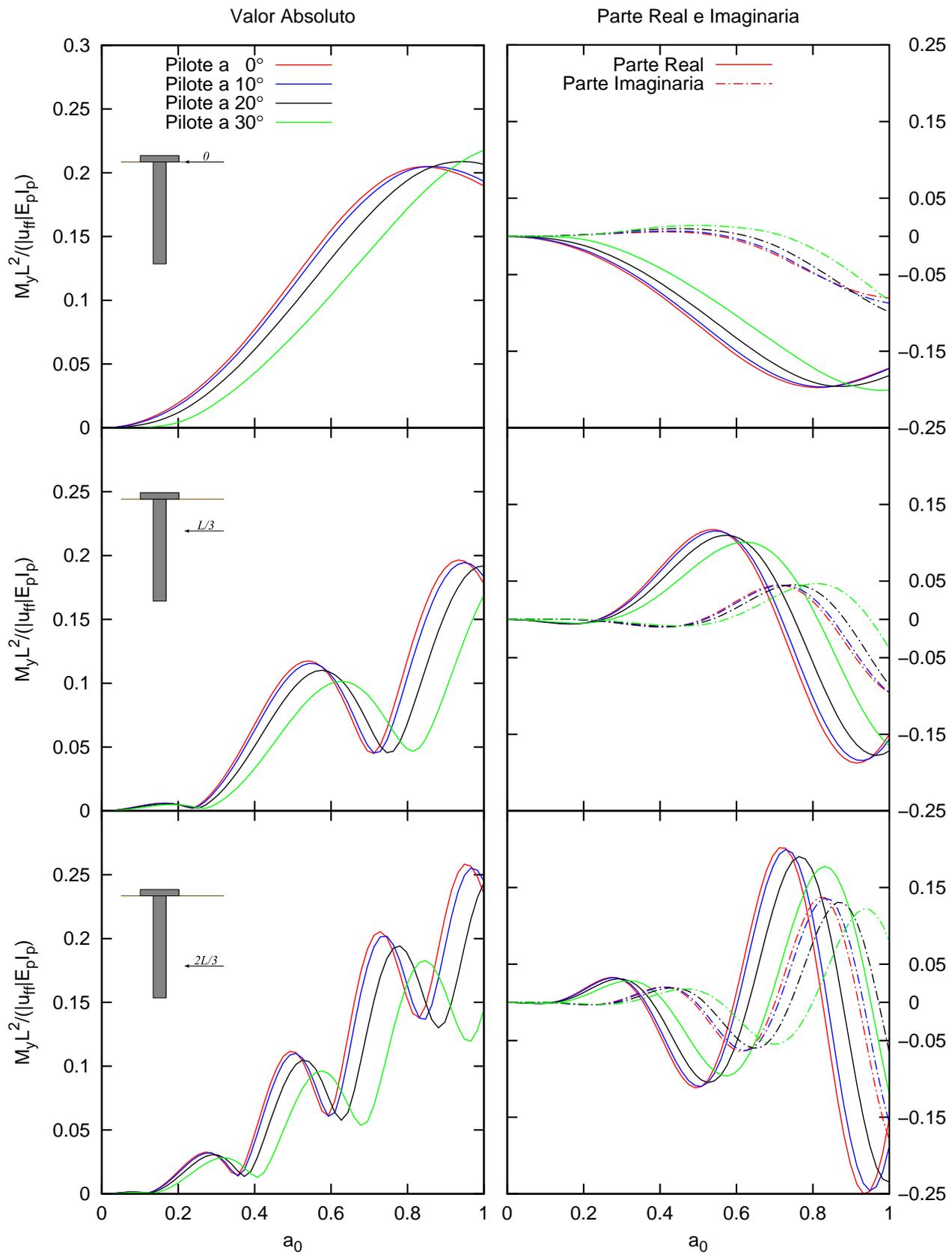


Figura A.1: Función de respuesta en frecuencia de momentos para pilote simple y $E_p/E_s = 50$

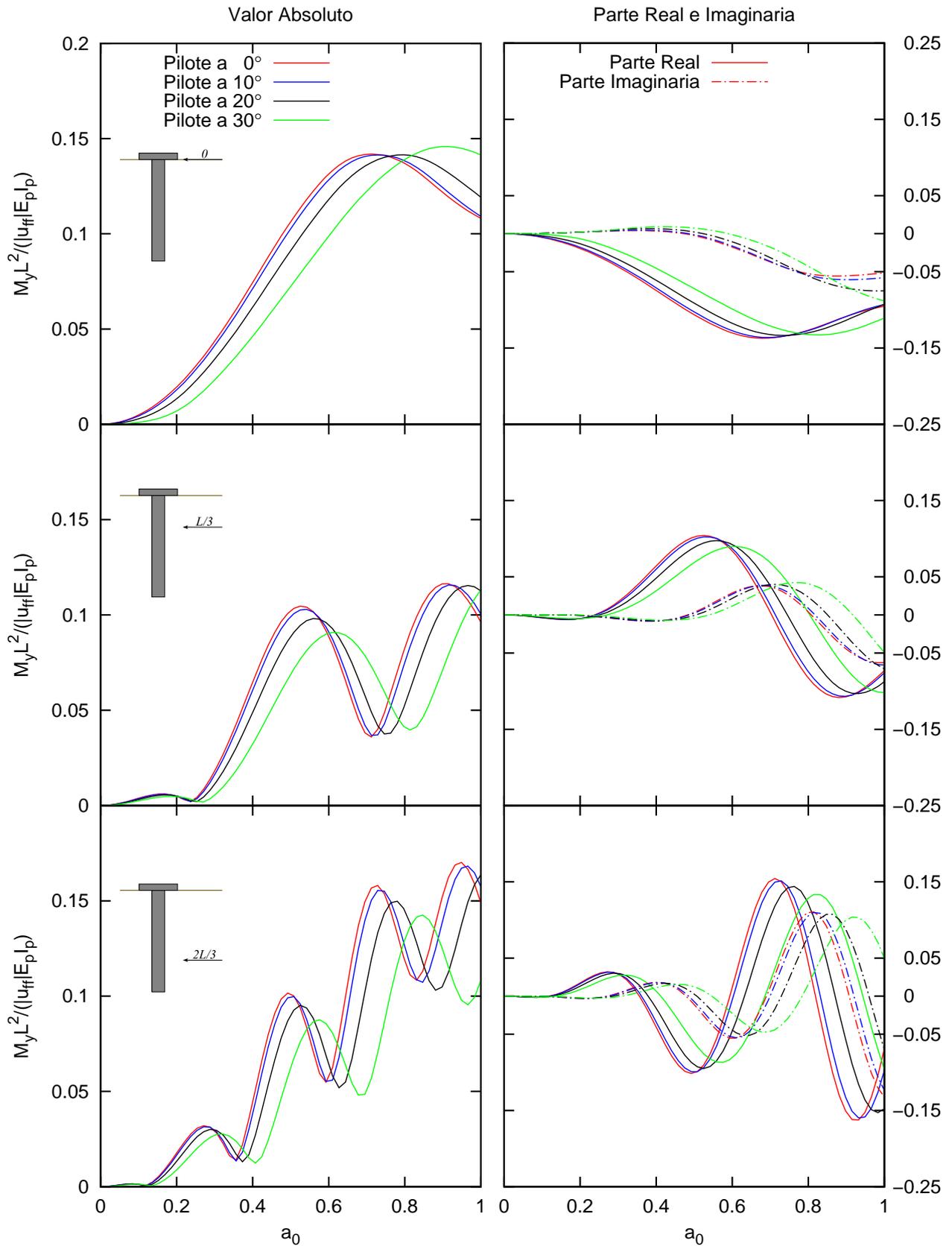


Figura A.2: Función de respuesta en frecuencia de momentos para pilote simple y $E_p/E_s = 100$

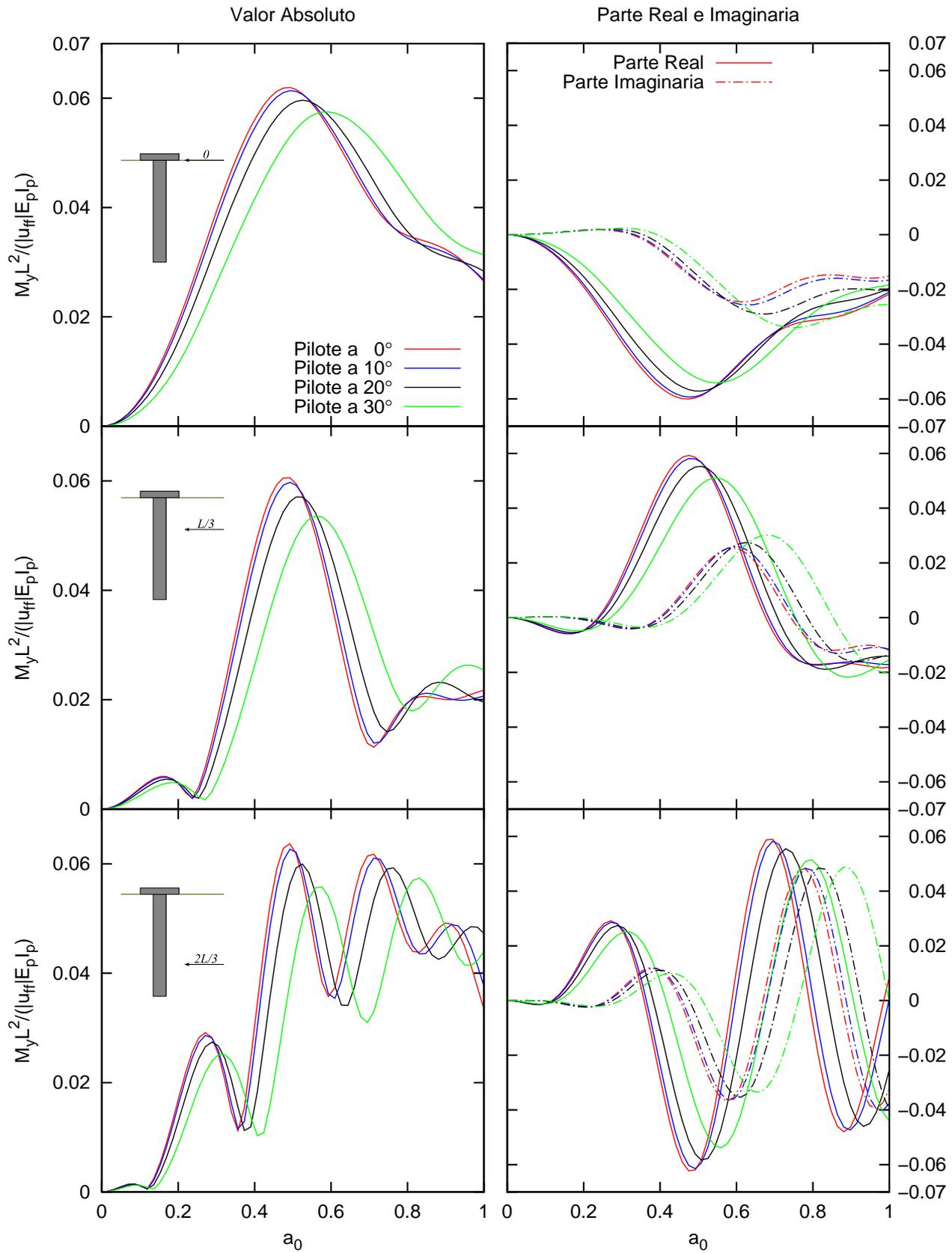


Figura A.3: Función de respuesta en frecuencia de momentos para pilote simple y $E_p/E_s = 500$

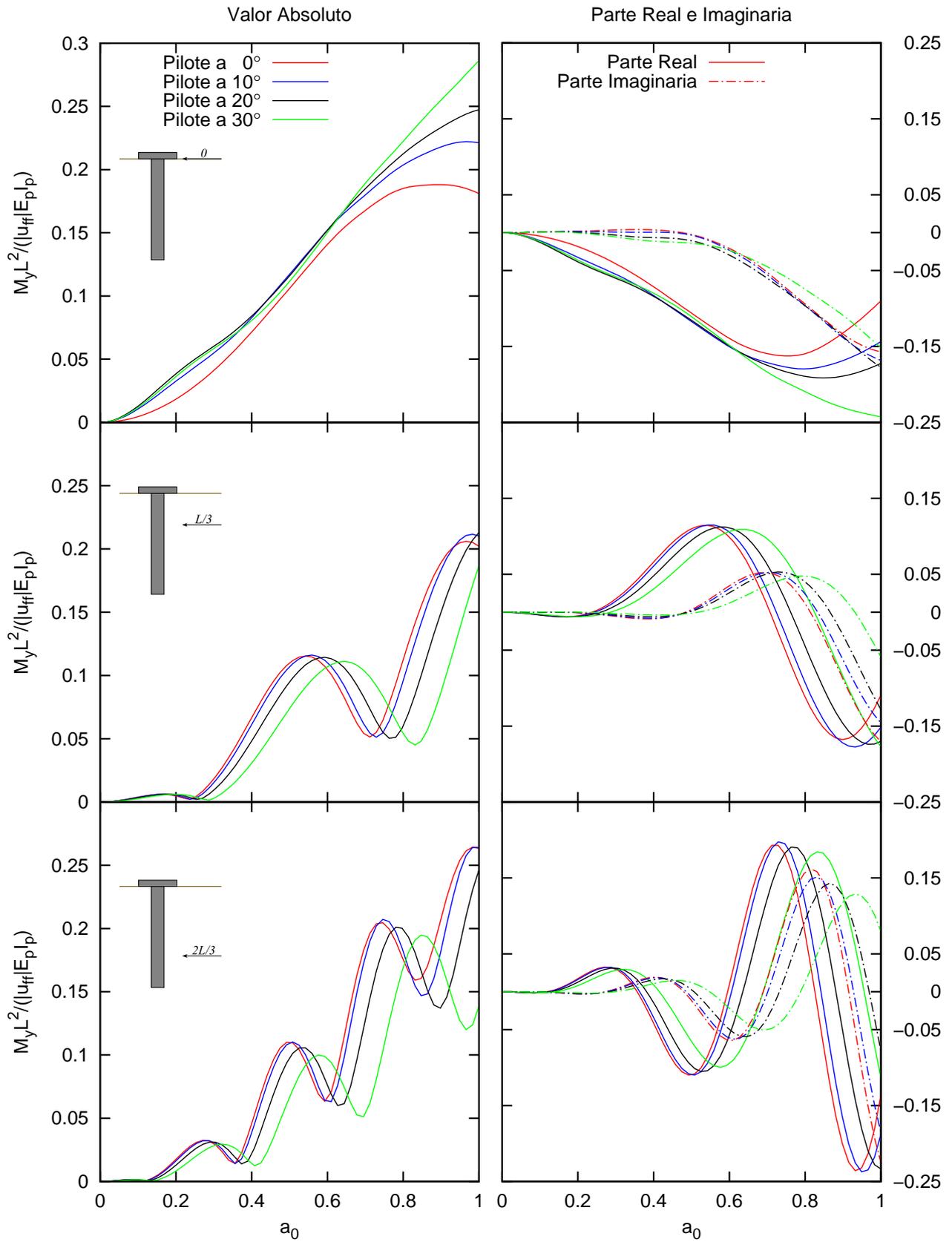


Figura A.4: Función de respuesta en frecuencia de momentos para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 50$

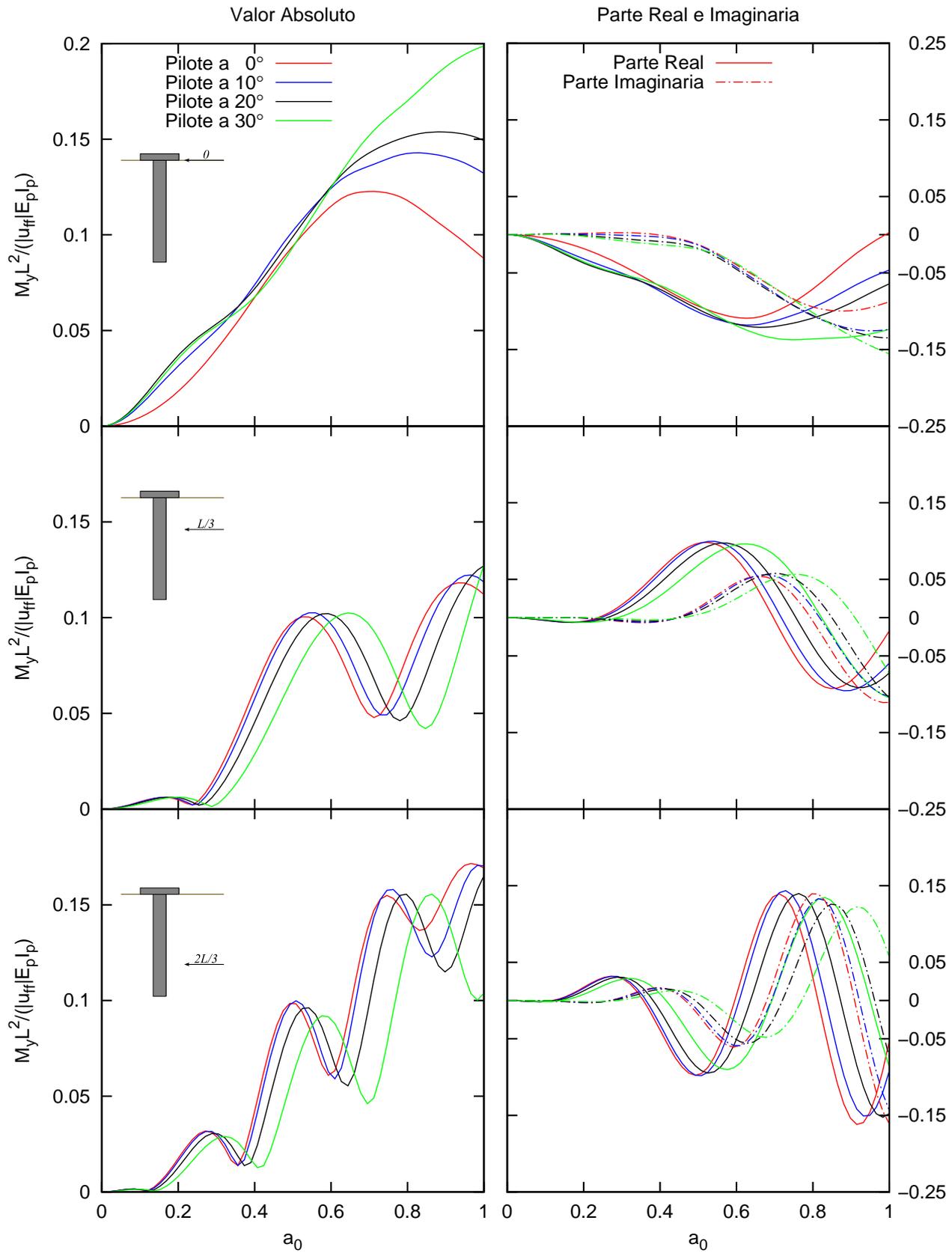


Figura A.5: Función de respuesta en frecuencia de momentos para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 100$

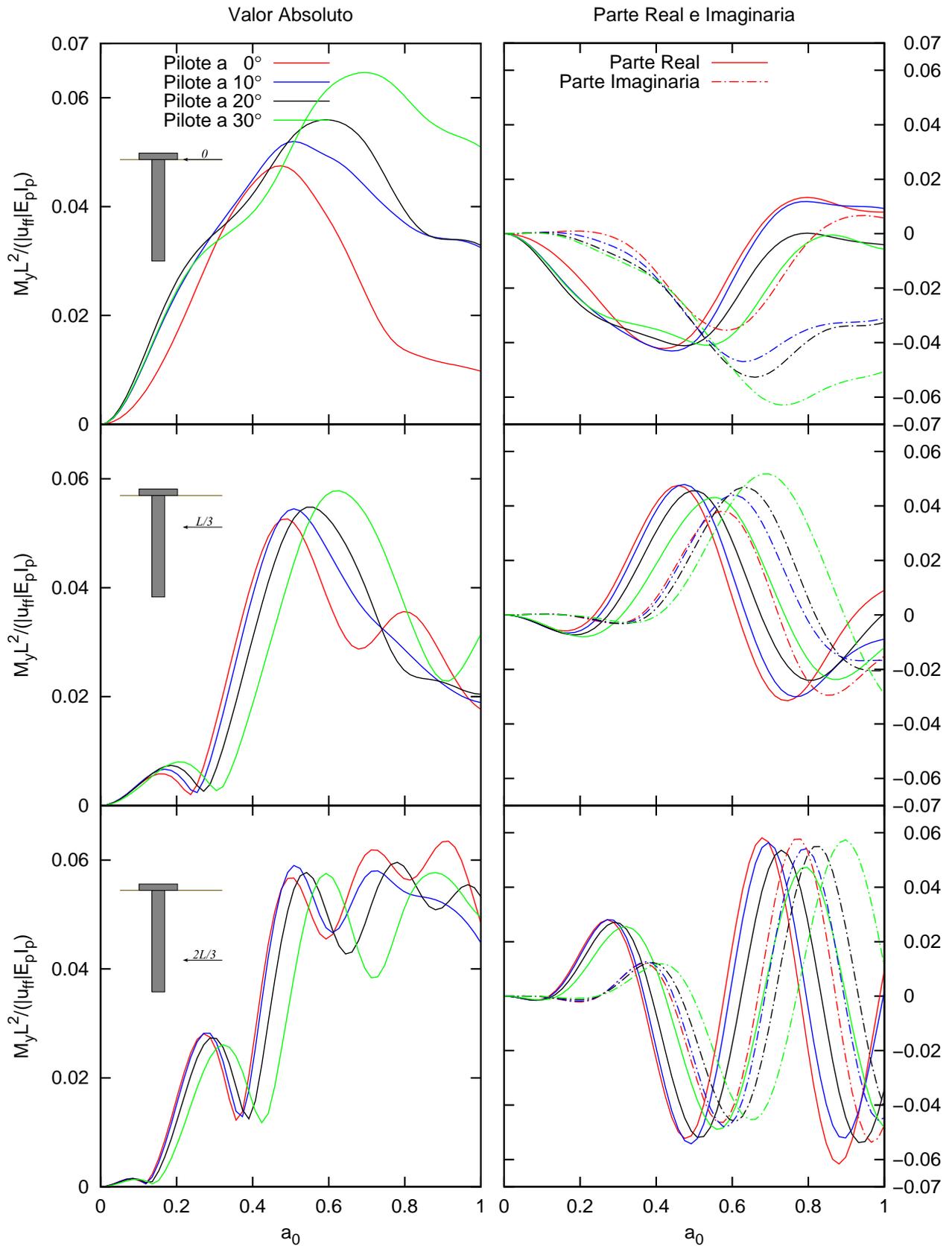


Figura A.6: Función de respuesta en frecuencia de momentos para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 500$

A.2 Funciones de Respuesta en Frecuencia de Cortantes

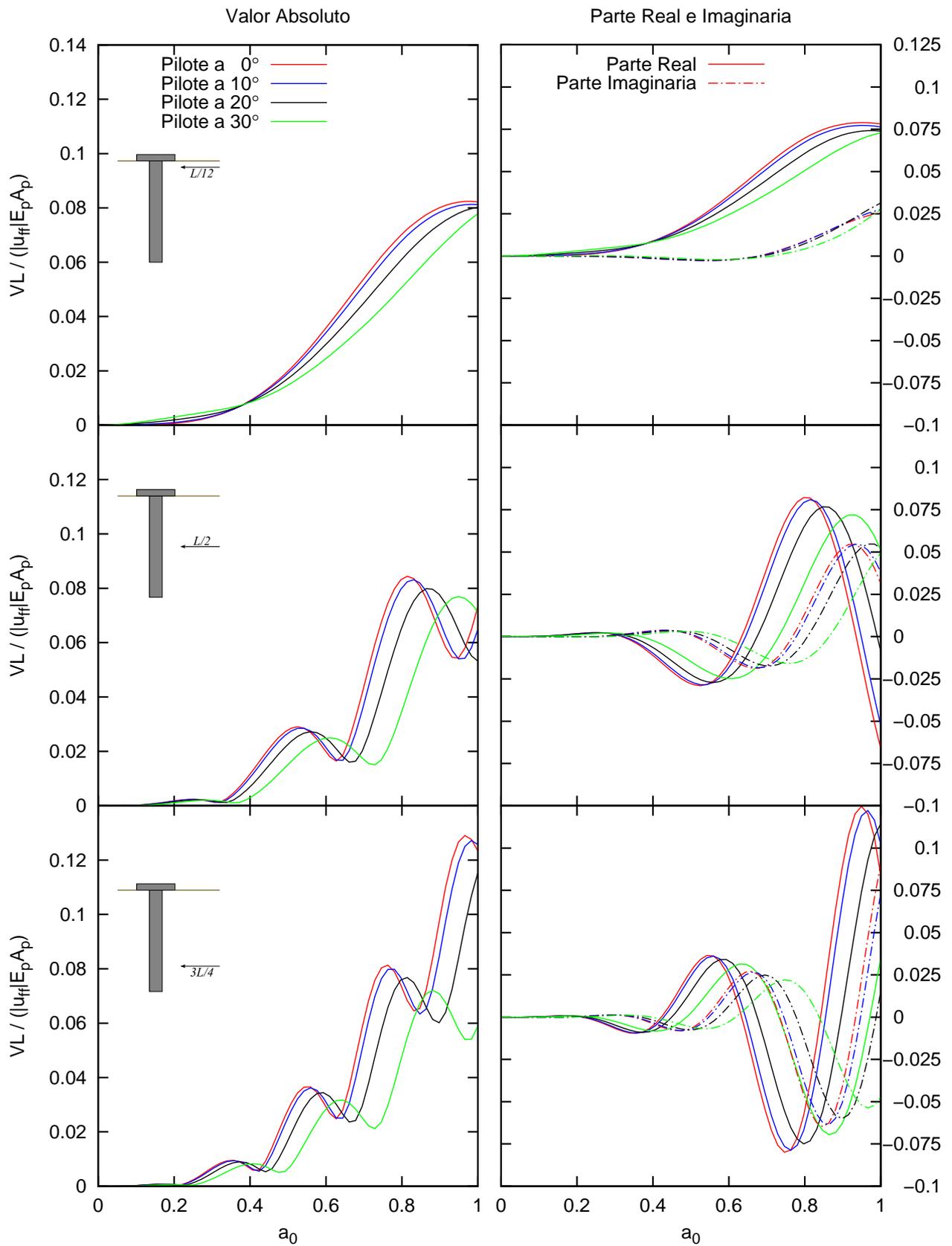


Figura A.7: Función de respuesta en frecuencia de cortantes para pilote simple y $E_p/E_s = 50$

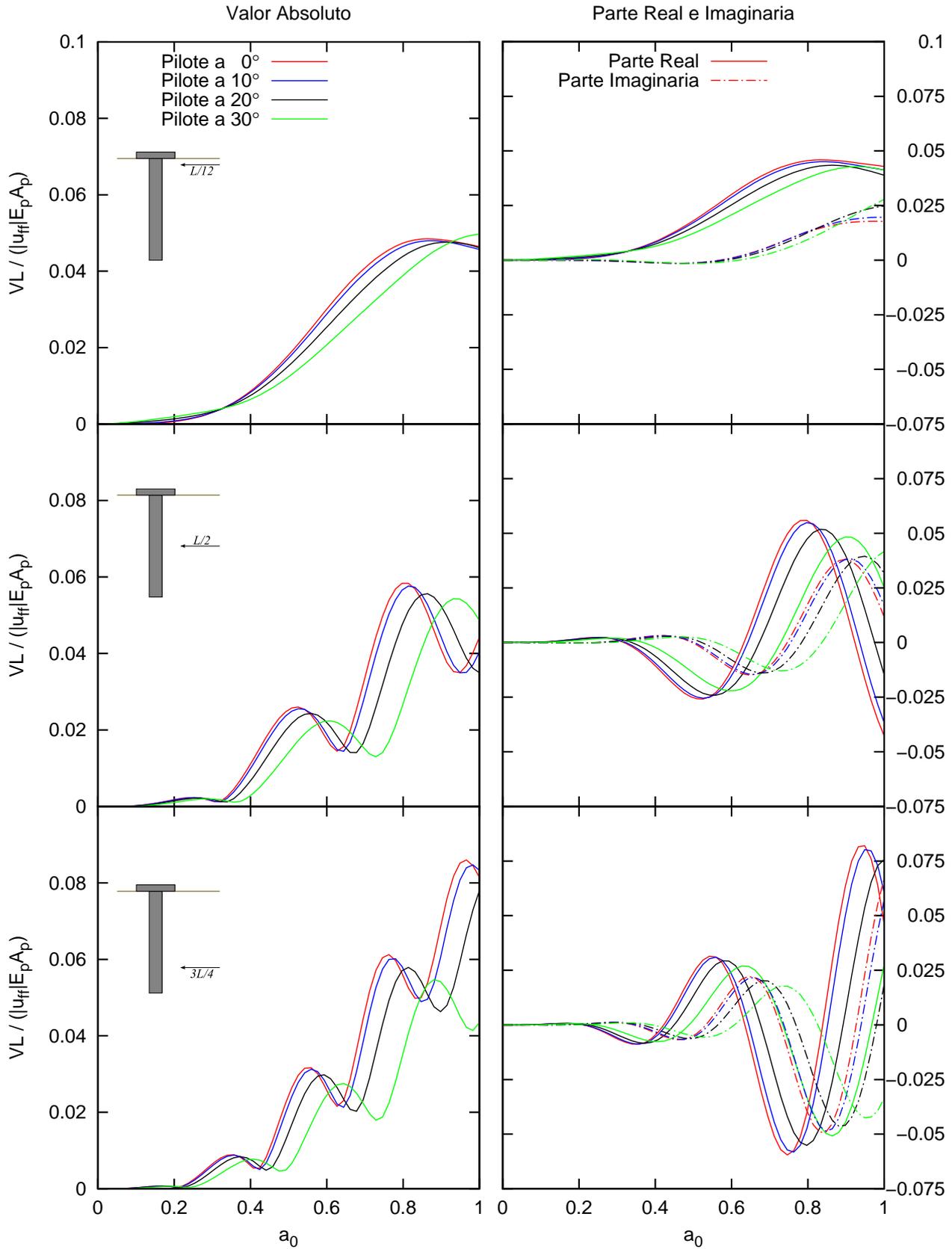


Figura A.8: Función de respuesta en frecuencia de cortantes para pilote simple y $E_p/E_s = 100$

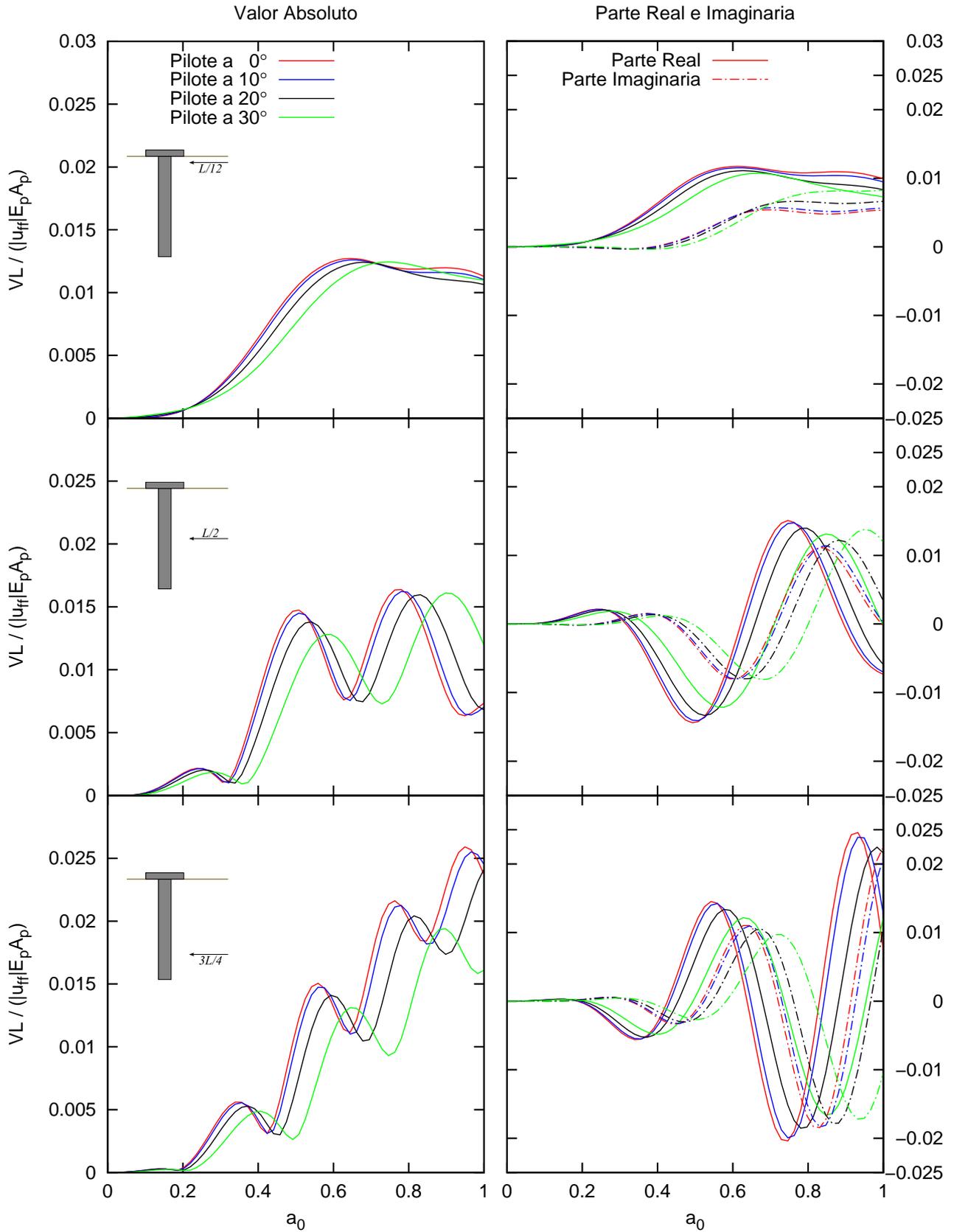


Figura A.9: Función de respuesta en frecuencia de cortantes para pilote simple y $E_p/E_s = 500$

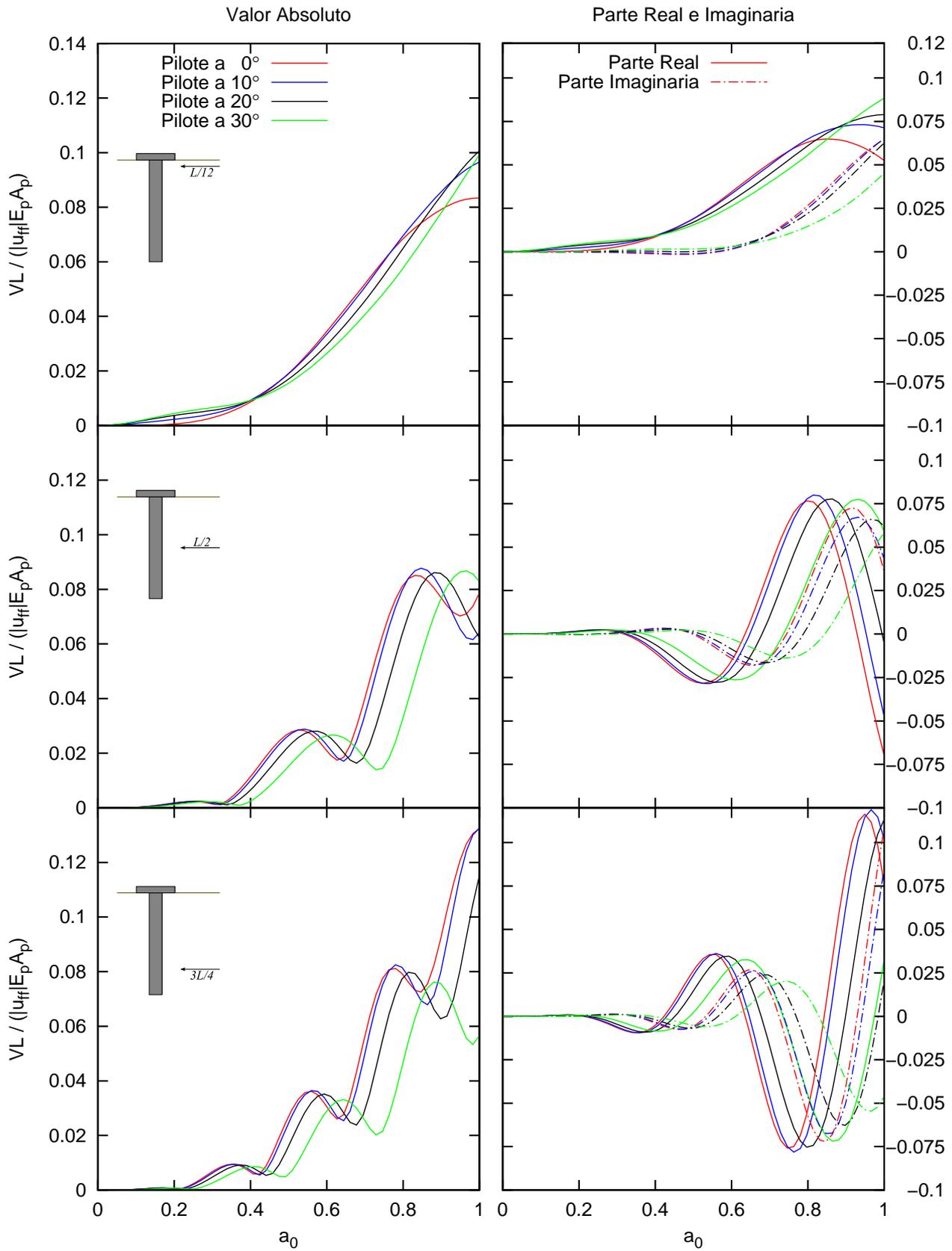


Figura A.10: Función de respuesta en frecuencia de cortantes para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 50$

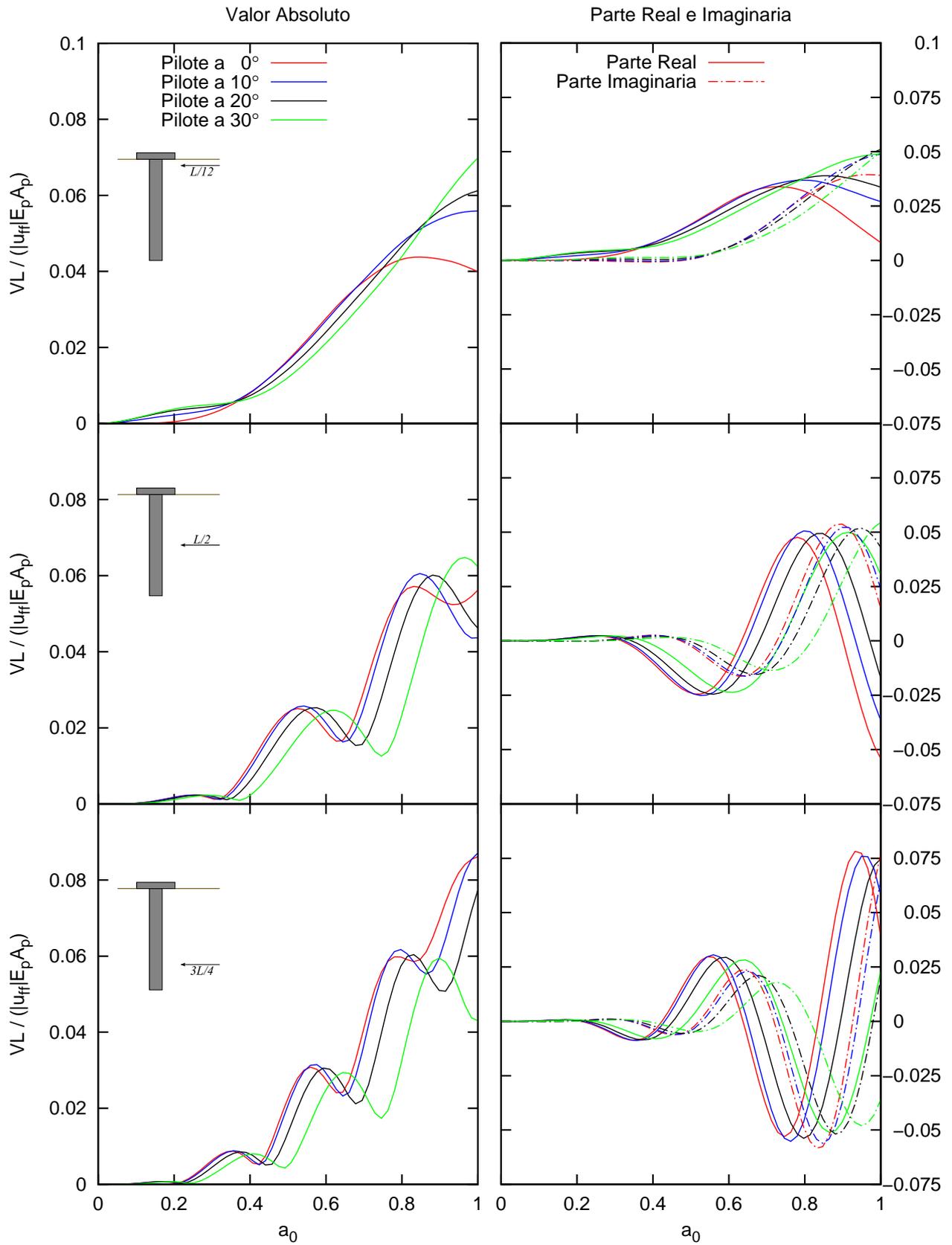


Figura A.11: Función de respuesta en frecuencia de cortantes para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 100$

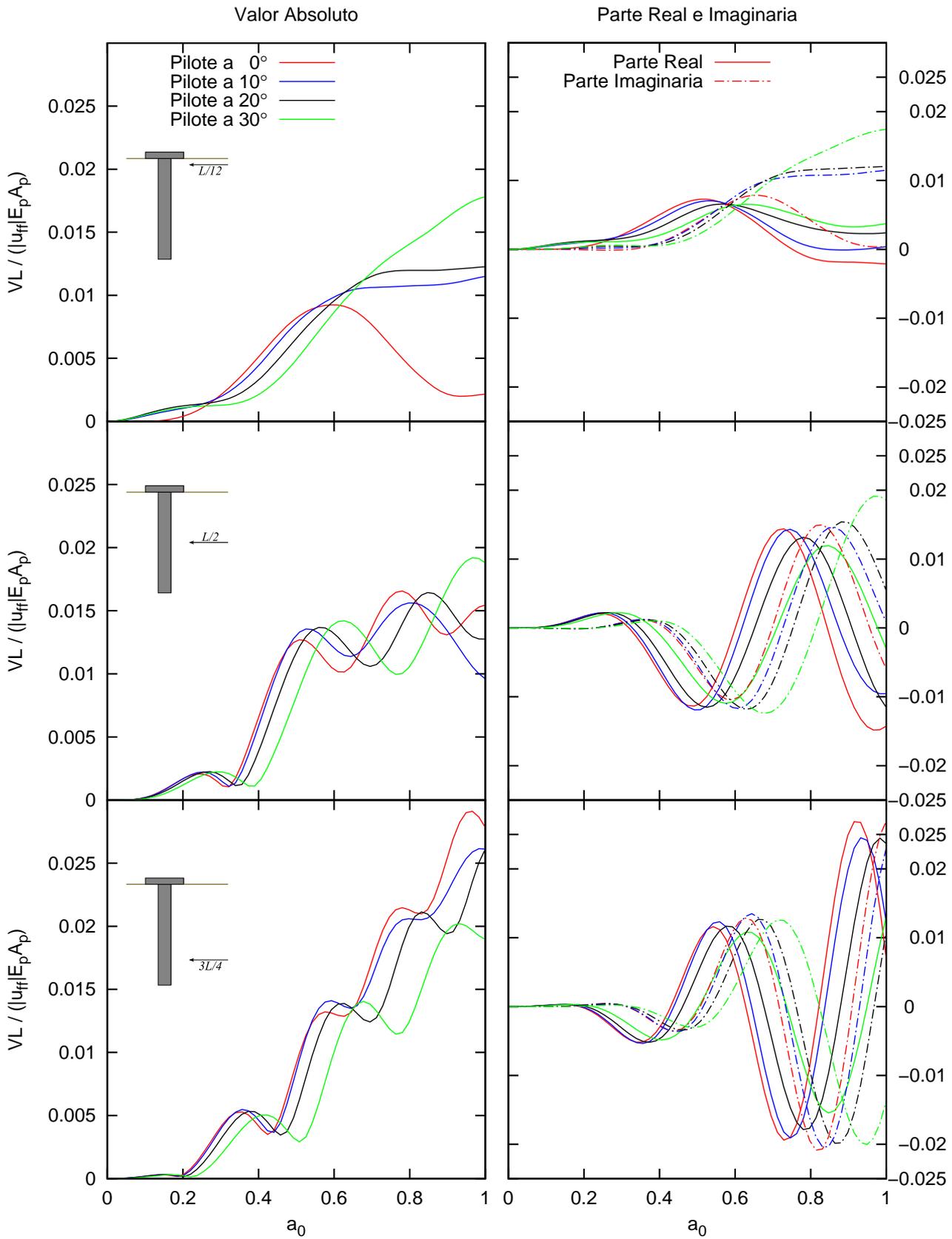


Figura A.12: Función de respuesta en frecuencia de cortantes para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 500$

A.3 Funciones de Respuesta en Frecuencia de Axiles

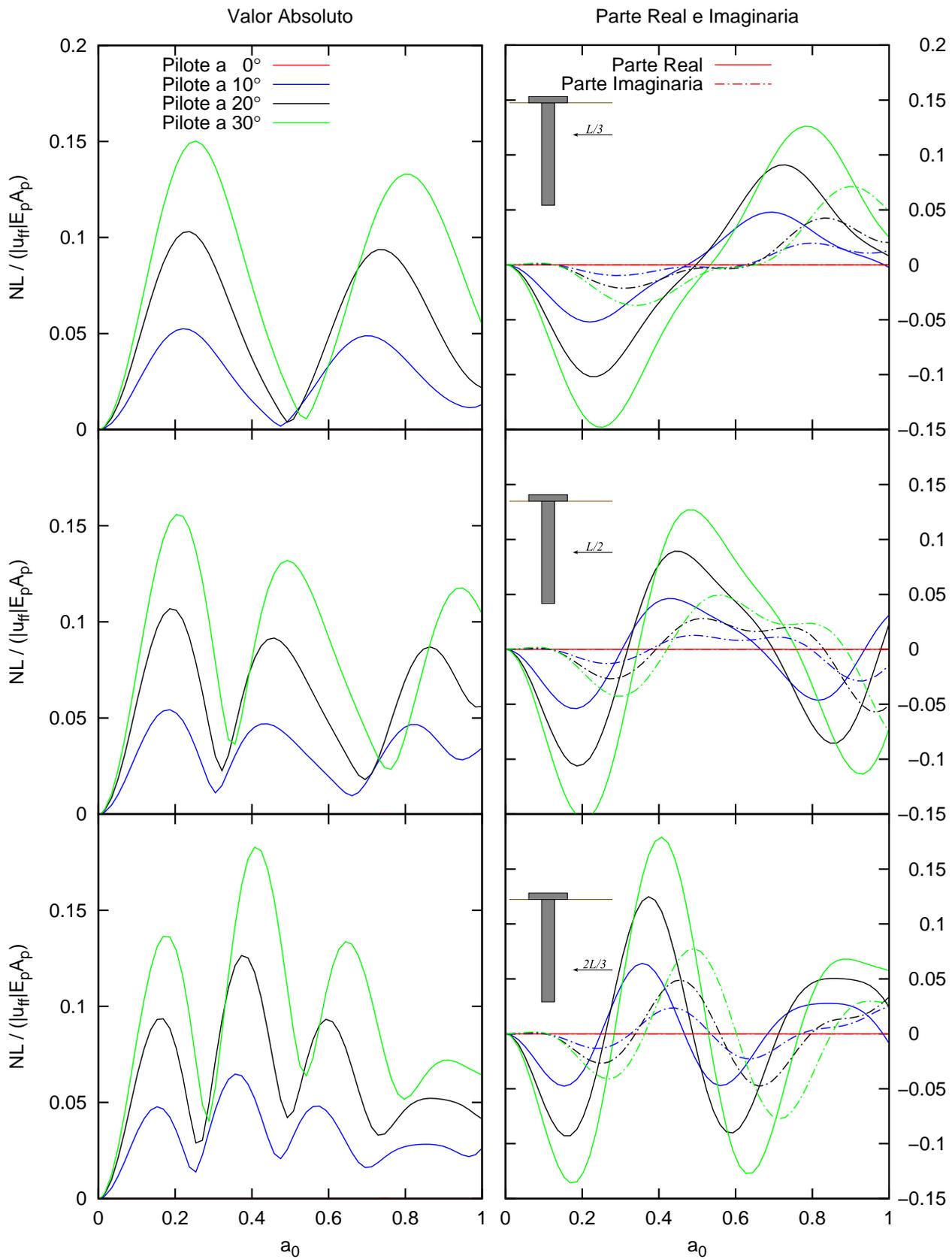


Figura A.13: Función de respuesta en frecuencia de axiles para pilote simple y $E_p/E_s = 50$

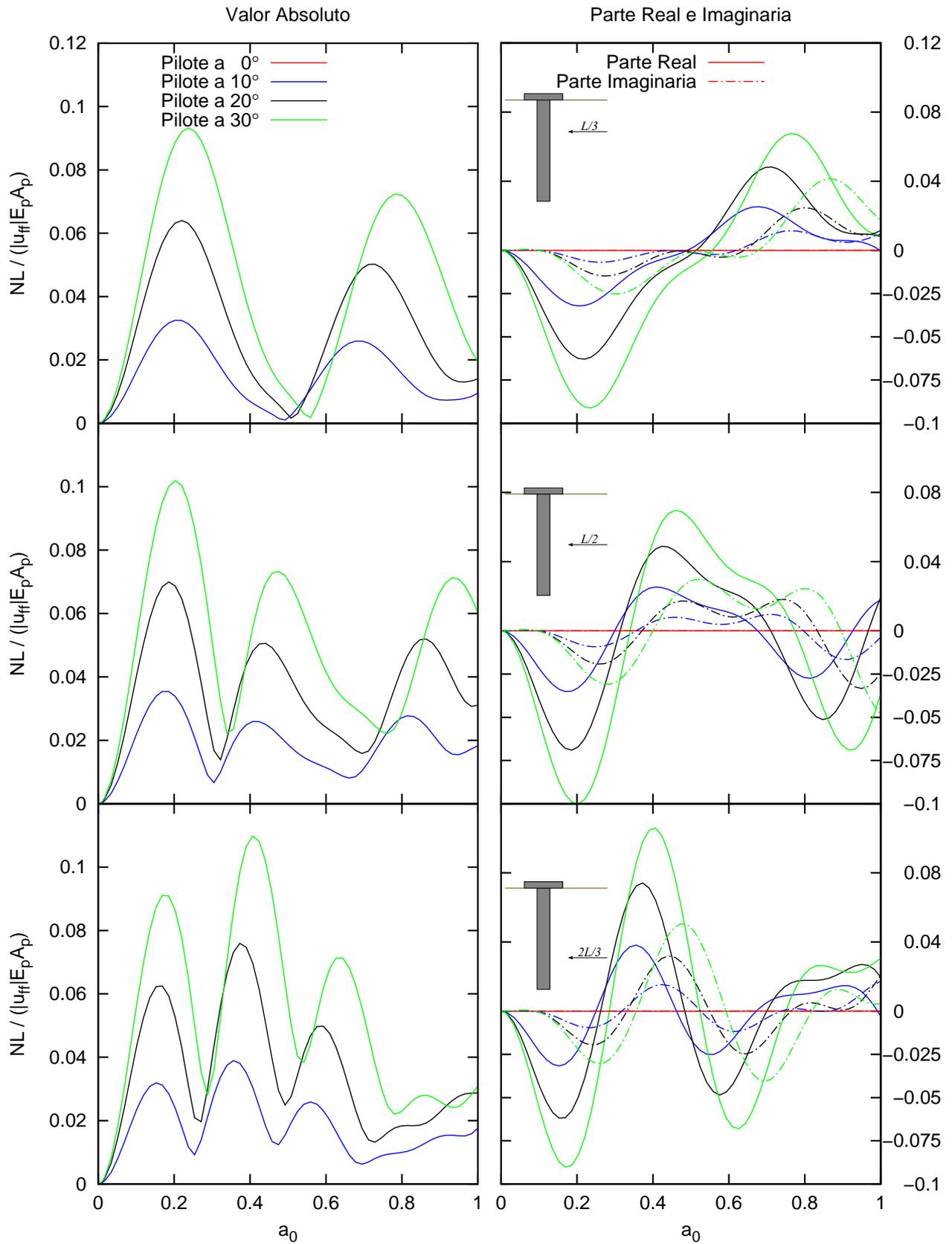


Figura A.14: Función de respuesta en frecuencia de axiles para pilote simple y $E_p/E_s = 100$

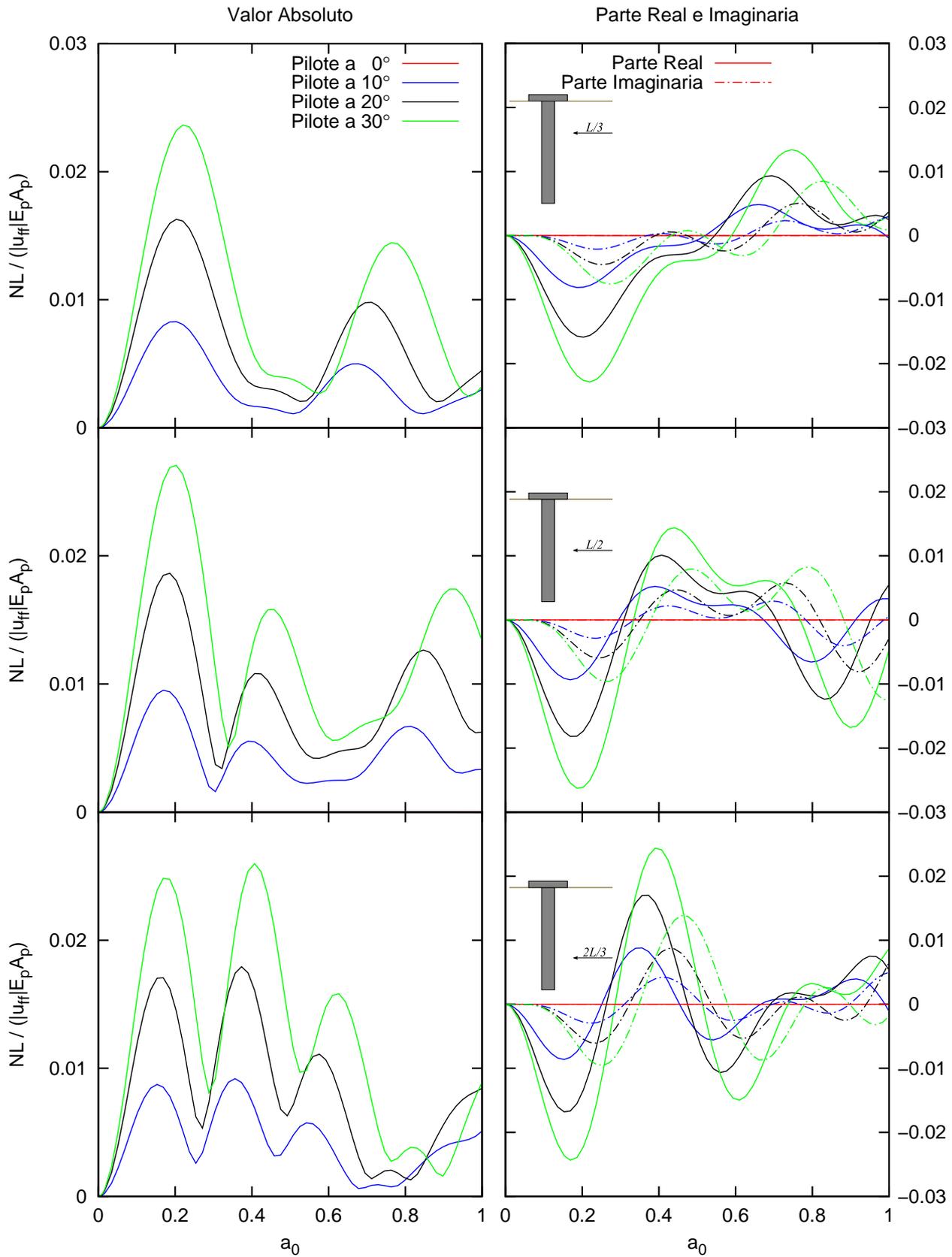


Figura A.15: Función de respuesta en frecuencia de axiles para pilote simple y $E_p/E_s = 500$

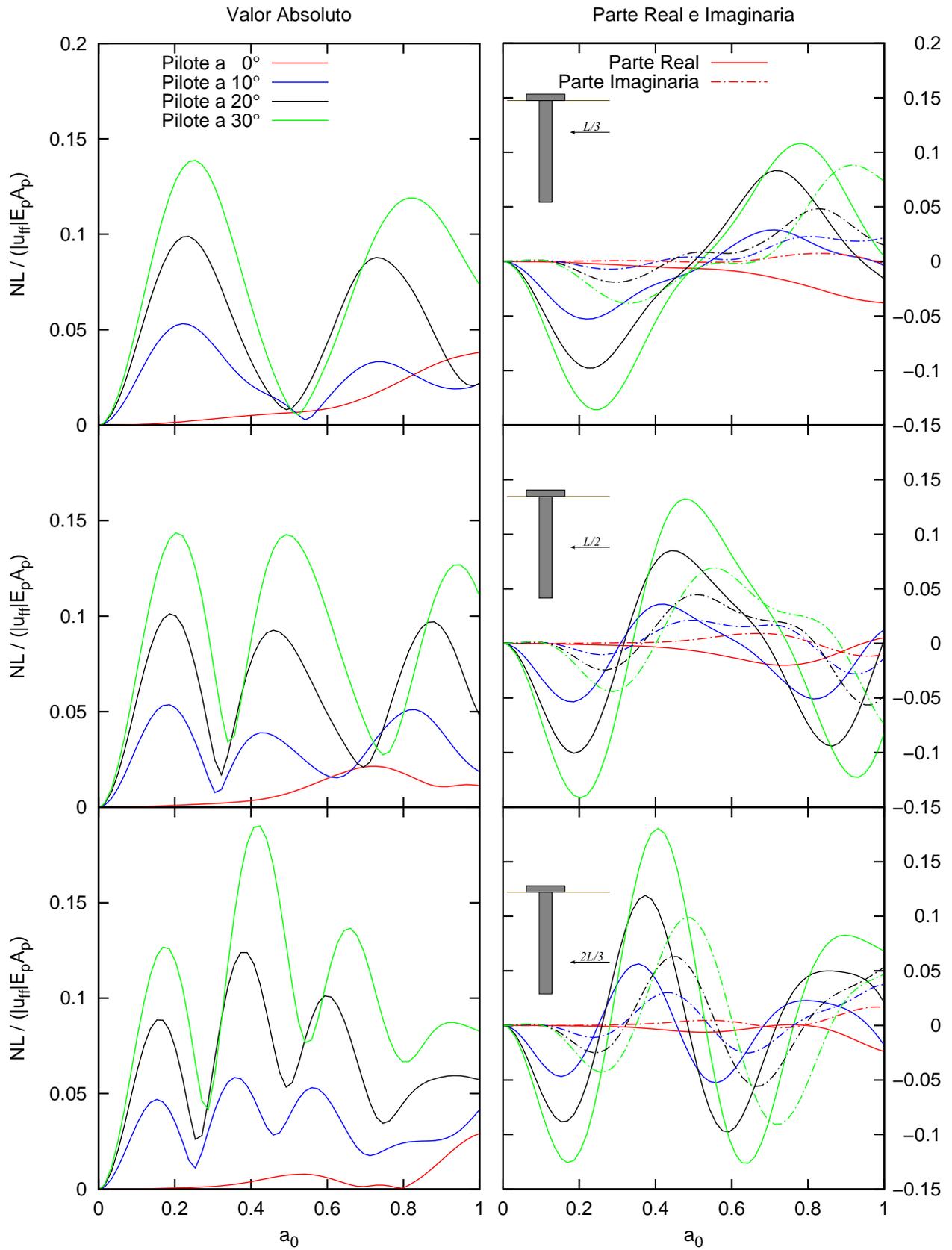


Figura A.16: Función de respuesta en frecuencia de axiles para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 50$

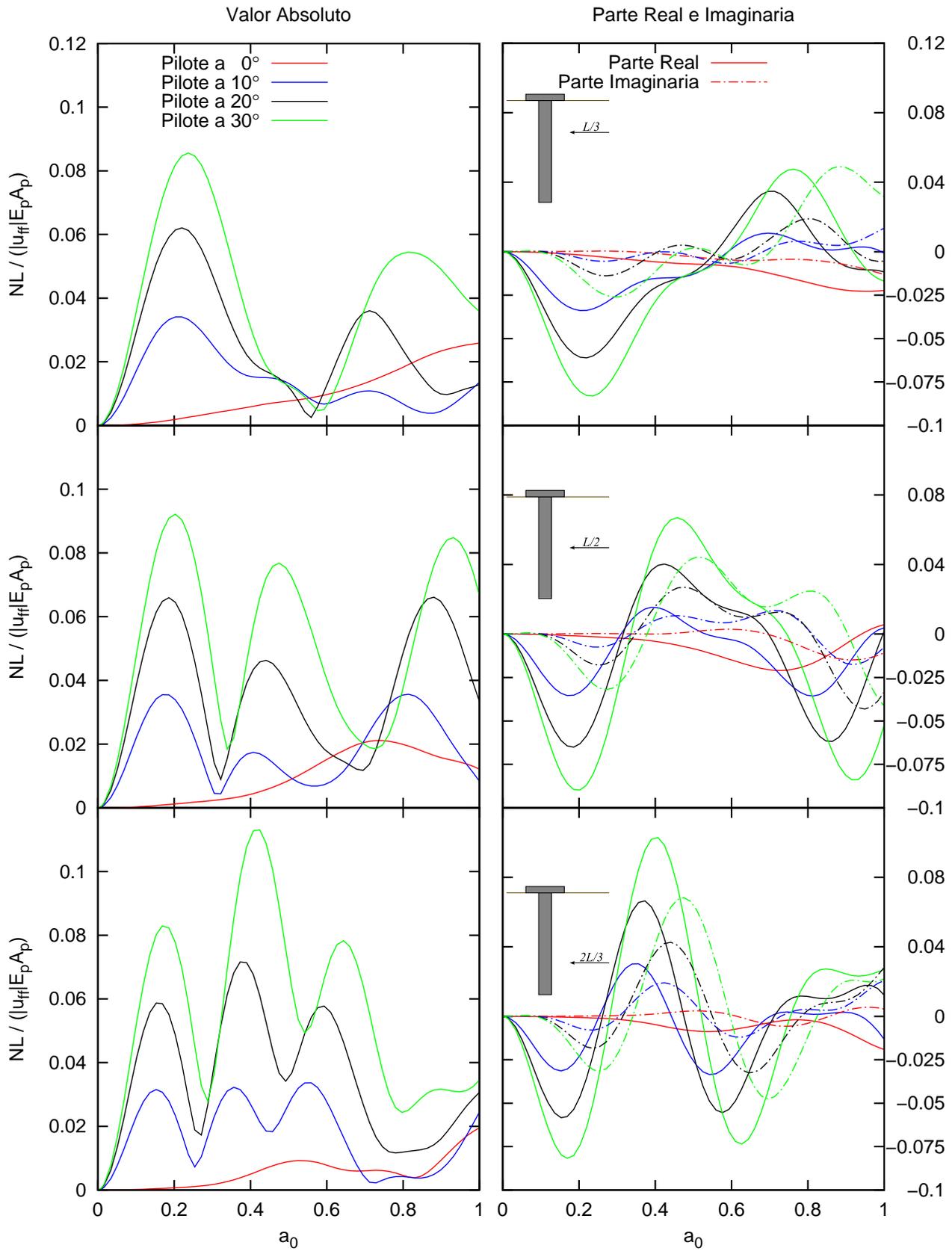


Figura A.17: Función de respuesta en frecuencia de axiles para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 100$

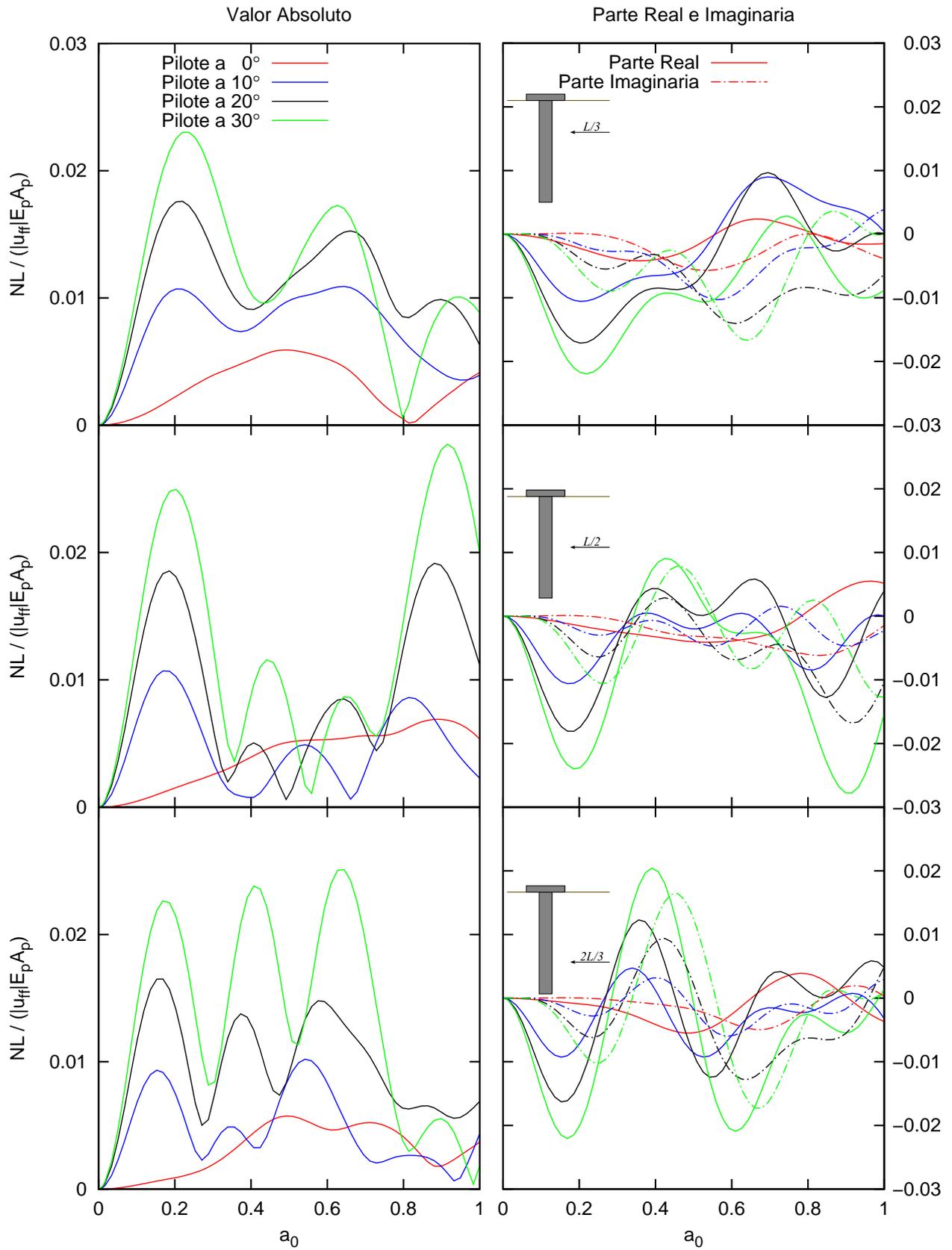


Figura A.18: Función de respuesta en frecuencia de axiles para encepado de pilotes 2×2 y $E_p/E_s = 500$